فهرست

فصل ۱ ب‌م‌م و ک‌م‌م عبارت‌های جبری - معادله و نامعادله

اولین فصل این کتاب، یک فصل جمع‌وجور خلاصه است. تعداد سؤالات مستقیم‌اش در کنکور متغیر است ولی از مطالبی که در این فصل یاد می‌گیرید، تا دلتان بخواهد، در فصل‌های دیگر استفاده می‌کنید.

اصل مطلب مربوط است به کتاب حسابان، ولی در ریاضی ۲ و دیفرانسیل هم مطالبی مرتبط با این فصل داریم.

برای آن‌که خوب مسلط شوید و خیال‌تان راحت باشد که همه‌چیز را دیده‌اید برایتان کمی بیش‌تر از ۱۰۰ مثال و تست فراهم کرده‌ایم.

یک جاهایی هم که لازم دیده‌ایم کمی مطالب تکمیلی هم آورده‌ایم که حسابی در حل سؤال‌ها حرفه‌ای شوید!

ب.م.م و ک.م.م اعداد صحیح

حتمن از سال‌های قبل یادتان هست که برای پیداکردن ب.م.م و ک.م.م دو یا چند عدد آن‌ها را به حاصل‌ضرب عوامل اول‌شان تجزیه می‌کردیم، ب.م.م برابر **حاصل‌ضرب عوامل مشترک با کوچک‌ترین توان و ک.م.م برابر حاصل‌ضرب تمام عوامل با بزرگ‌ترین توان است**. از ب.م.م و ک.م.م در حل بعضی از مسایل کمک می‌گیریم.

مثال **می‌خواهیم ۱۵۰ لیتر نفت، ۱۲۰ لیتر بنزین و ۱۷۵ لیتر گازوییل را در بطری‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی کنیم. کم‌ترین تعداد بطری‌ها به شرطی که حجم بطری‌ها یک عدد طبیعی باشد، کدام است؟**

۱) ۷۹　　۲) ۸۹　　۳) ۷۱　　۴) ۸۱

گزینه۲ تعداد بطری‌ها وقتی حداقل می‌شود که حجم‌شان بیشترین مقدار ممکن شود. چون می‌خواهیم ۱۵۰، ۱۲۰ و ۱۷۵ لیتر را در بطری‌ها بریزیم، پس حجم بطری‌ها باید برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این سه عدد باشد:

$$۱۵۰=۲\times۳\times۵^۲\quad,\quad ۱۲۰=۲^۳\times۳\times۵\quad,\quad ۱۷۵=۵^۲\times۷\ \Rightarrow\ \text{ب.م.م}=۵$$

پس تعداد بطری‌ها برابر است با:

$$\frac{۱۵۰}{۵}+\frac{۱۲۰}{۵}+\frac{۱۷۵}{۵}=۳۰+۲۴+۳۵=۸۹$$

مثال **دنباله‌های حسابی ...,۱,۷,۱۳ و ...,۲,۹,۱۶، چند جمله‌ی سه‌رقمی مشترک دارند؟**

۱) ۱۹　　۲) ۲۰　　۳) ۲۱　　۴) ۲۲

گزینه۳ اول هر کدام از دنباله‌ها را تا جایی ادامه می‌دهیم که به اولین جمله‌ی مشترک برسیم:

$$۱,۷,۱۳,۱۹,۲۵,۳۱,۳۷,۴۳,...$$
$$۲,۹,۱۶,۲۳,۳۰,۳۷,۴۴,...$$

می‌بینیم که اولین جمله‌ی مشترک دو دنباله ۳۷ است. جمله‌ی مشترک بعدی جمله‌ای است که از اضافه‌شدن مضربی از ۶ (قدرنسبت دنباله‌ی اول) به عدد ۳۷ یا از اضافه‌شدن مضربی از ۷ (قدرنسبت دنباله‌ی دوم) به عدد ۳۷ به دست آید. پس جملات مشترک دو دنباله، خود یک دنباله‌ی حسابی تشکیل می‌دهند که قدرنسبتش برابر ک.م.م قدرنسبت دو دنباله است؛ یعنی $۴۲=۶\times۷$. پس جملات مشترک به صورت $۳۷+۴۲k$ هستند. حالا تعداد اعداد سه‌رقمی را که به شکل $۳۷+۴۲k$ هستند، پیدا می‌کنیم:

$$۱۰۰\le۳۷+۴۲k\le۹۹۹\Rightarrow ۶۳\le۴۲k\le۹۶۲\Rightarrow\frac{۶۳}{۴۲}\le k\le\frac{۹۶۲}{۴۲}\Rightarrow ۲\le k\le۲۲\Rightarrow \text{تعداد اعداد}=۲۲-۲+۱=۲۱$$

ب.م.م و ک.م.م چندجمله‌ای‌ها

در مورد چندجمله‌ای‌ها هم دقیقن مثل اعداد صحیح عمل می‌کنیم؛ یعنی هر کدام از چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم و سپس ب.م.م و ک.م.م‌شان را پیدا می‌کنیم.

در صورتی که چندجمله‌ای‌ها دارای ضرایب صحیح باشند، باید ب.م.م یا ک.م.م ضرایب را نیز پیدا کنیم.

مثال **ک.م.م دو عبارت $x^۳+۲x^۲+x+۲$ و $x^۳-۲x^۲+x-۲$ برابر کدام است؟**

۱) $x^۴-۳x^۲-۴$　　۲) $x^۴+۲x^۲-۴$　　۳) $x^۴+۲x^۲+۴$　　۴) $x^۴-۲x^۲+۴$

گزینه۱ هر کدام از عبارت‌ها را با دسته‌بندی تجزیه می‌کنیم:

$$x^۳+۲x^۲+x+۲=x^۲(x+۲)+(x+۲)=(x+۲)(x^۲+۱)$$
$$x^۳-۲x^۲+x-۲=x^۲(x-۲)+(x-۲)=(x-۲)(x^۲+۱)$$

پس ک.م.م دو عبارت برابر است با:

$$(x-۲)(x+۲)(x^۲+۱)=(x^۲-۴)(x^۲+۱)=x^۴-۳x^۲-۴$$

مثال **اگر ب.م.م دو عبارت $x^۳-۵x^۲+۸x-۴$ و $x^۳-۴x^۲+۵x-۲$ برابر $P(x)$ باشد، مجموع ضرایب $P(x)$ برابر کدام است؟**

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) -۱　　۴) -۲

گزینه۱ مجموع ضرایب هر دو عبارت برابر صفر است؛ پس هر دو بر $x-۱$ بخش‌پذیرند. بنابراین $P(x)$ هم بر $x-۱$ بخش‌پذیر است و مجموع ضرایبش برابر صفر است.

هر دو عبارت را تجزیه و ب.م.م را پیدا می‌کنیم:

$$x^۳-۵x^۲+۸x-۴=x^۳-x^۲-۴x^۲+۸x-۴=x^۲(x-۱)-۴(x-۱)^۲=(x-۱)(x^۲-۴x+۴)=(x-۱)(x-۲)^۲$$
$$x^۳-۴x^۲+۵x-۲=x^۳-x^۲-۳x^۲+۵x-۲=x^۲(x-۱)-(۳x-۲)(x-۱)=(x-۱)(x^۲-۳x+۲)=(x-۱)(x-۱)(x-۲)=(x-۱)^۲(x-۲)$$

پس ب.م.م دو عبارت برابر $(x-۱)(x-۲)$، یعنی $x^۲-۳x+۲$ است که مجموع ضرایبش برابر صفر است.

ساده‌کردن عبارت‌های گویا

از ب.م.م و ک.م.م عبارت‌ها برای ساده‌کردن عبارت‌های گویا استفاده می‌کنیم. بعضی وقت‌ها هم باید با ساده‌کردن عبارت‌ها، مقدار پارامترها را برای آن‌که یک تساوی همواره برقرار باشد (یعنی اتحاد باشد)، تعیین کنیم. برای پیداکردن پارامترها معمولن می‌توانیم از دو راه استفاده کنیم:

الف) بعد از ساده‌کردن طرفین تساوی به جای x مقادیر دلخواهی قرار دهیم و مقدار پارامترها را پیدا کنیم.

ب) طرفین را به شکل چندجمله‌ای‌هایی برحسب توان‌های نزولی (یا صعودی) x مرتب کنیم و دو طرف را متحد قرار دهیم.

بگذارید با حل یک مثال این دو راه حل را ببینیم.

مثال اگر $\frac{۲}{x^۳-x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-۱}+\frac{c}{x+۱}$ باشد، $a^۲+b^۲+c^۲$ برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

گزینه۲ چون $x\neq ۰,۱,-۱$ است، پس طرفین را در $x(x-۱)(x+۱)$ ضرب می‌کنیم؛ می‌شود: $a(x-۱)(x+۱)+bx(x+۱)+cx(x-۱)=۲$. حالا به جای x اعداد $x=۰$، $x=۱$ و $x=-۱$ را جایگزین می‌کنیم:

$$x=۰ \Rightarrow -a=۲ \Rightarrow a=-۲ \qquad x=۱ \Rightarrow ۲b=۲ \Rightarrow b=۱ \qquad x=-۱ \Rightarrow ۲c=۲ \Rightarrow c=۱$$

پس $a^۲+b^۲+c^۲=۶$ است.

اول طرفین را مثل راه اول در $x(x-۱)(x+۱)$ ضرب می‌کنیم و بعد عبارت را برحسب توان‌های نزولی x مرتب می‌کنیم:

$$a(x-۱)(x+۱)+bx(x+۱)+cx(x-۱)=(a+b+c)x^۲+(b-c)x-a$$

و اگر $(a+b+c)x^۲+(b-c)x-a$ بخواهد با ۲ متحد باشد، باید:

$$\begin{cases}a+b+c=۰\\ b-c=۰\\ -a=۲ \Rightarrow a=-۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b+c=۲\\ b-c=۰\end{cases} \Rightarrow b=۱, c=۱$$

پس $a^۲+b^۲+c^۲=۶$ است.

معادلات شامل عبارت‌های گویا

در بعضی از مسایل، اول باید معادله‌ای برای حل مسئله تشکیل دهیم و سپس آن را حل کنیم. معادله‌ی موردنظر با توجه به نوع سؤال ممکن است یک معادله‌ی درجه اول، درجه دوم و ... یا یک معادله‌ی گویا باشد. در ادامه حل چند مثال را در مورد معادلات گویا می‌بینید تا با این نوع سؤال‌ها آشنا شوید.

مثال **یک استخر می‌تواند توسط سه شیر آب A، B و C پر شود. اگر تنها شیر آب A باز باشد، در ۱۲ ساعت و اگر تنها شیر آب B باز باشد، در ۶ ساعت و اگر هر سه شیر آب باز باشند، در یک ساعت و بیست دقیقه استخر پر می‌شود. در صورتی که تنها شیر آب C باز باشد، استخر در چند ساعت پر می‌شود؟**

۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

گزینه۱ شیر آب A در هر ساعت $\frac{۱}{۱۲}$ و شیر آب B در هر ساعت $\frac{۱}{۶}$ استخر را پر می‌کند. اگر استخر با شیر آب C در x ساعت پر شود، پس در هر ساعت $\frac{۱}{x}$ استخر را پر می‌کند. بنابراین با بازبودن هر سه شیر آب در هر ساعت $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۲}$ استخر پر می‌شود. از طرفی چون استخر در ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه، یعنی $۱\frac{۱}{۳}=\frac{۴}{۳}$ ساعت پر می‌شود، پس با بازبودن هر سه شیر آب، در هر ساعت $\frac{۳}{۴}$ استخر پر می‌شود. پس داریم:

$$\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{x}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{x}=\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{x}=\frac{۹-۱-۲}{۱۲}=\frac{۶}{۱۲} \Rightarrow x=۲$$

مثال **دو کشاورز اگر با هم مزرعه‌ای را درو کنند، کارشان در ۶ روز تمام می‌شود. کارگر اول به تنهایی مزرعه را ۵ روز زودتر از کارگر دوم درو می‌کند. کارگر سریع‌تر مزرعه را در چند روز درو می‌کند؟**

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

گزینه۳ اگر کارگر سریع‌تر مزرعه را در x روز درو کند، کارگر دیگر آن را در x+۵ روز درو می‌کند؛ پس هر کدام در هر روز به ترتیب $\frac{۱}{x}$ و $\frac{۱}{x+۵}$ مزرعه را درو می‌کنند و از طرفی هر دوی آن‌ها با هم در هر روز $\frac{۱}{۶}$ مزرعه را درو می‌کنند. بنابراین وقتی با هم کار می‌کنند، باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۵}=\frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{x+۵+x}{x(x+۵)}=\frac{۱}{۶} \Rightarrow x^۲+۵x=۱۲x+۳۰ \Rightarrow x^۲-۷x-۳۰=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۱۰\\ x=-۳\end{cases}$$

پس کارگر سریع‌تر مزرعه را در ۱۰ روز درو می‌کند.

مثال با ۳۶۰۰۰۰ تومان می‌توانیم تعدادی دفتر (یکسان) بخریم. اگر برای هر دفتر ۲۰۰۰ تومان تخفیف بگیریم، می‌توانیم دو دفتر بیشتر بخریم. قیمت هر دفتر قبل از تخفیف چه‌قدر بوده است؟

۱) ۱۶۰۰۰ ۲) ۱۸۰۰۰ ۳) ۲۰۰۰۰ ۴) ۲۴۰۰۰

گزینه۳ اگر قیمت هر دفتر را قبل از تخفیف x تومان فرض کنیم، تعداد دفترهایی که بدون تخفیف می‌توانیم بخریم $\frac{360000}{x}$ و تعداد دفترهایی که بعد از تخفیف می‌خریم $\frac{360000}{x-2000}$ است؛ پس باید داشته باشیم:

$$\frac{360000}{x-2000}=\frac{360000}{x}+2 \Rightarrow 360000\left(\frac{1}{x-2000}-\frac{1}{x}\right)=2 \Rightarrow 360000\left(\frac{x-x+2000}{x(x-2000)}\right)=2 \Rightarrow 2x(x-2000)=2000\times 360000$$

$$\Rightarrow x(x-2000)=1000\times 360000 \Rightarrow x(x-2000)=18000\times 20000 \Rightarrow x=20000$$

پس قیمت هر دفتر قبل از تخفیف ۲۰۰۰۰ تومان بوده است!

حل معادله در حالت کلی

روش حل معادله‌های درجه اول و دوم را قبلن یاد گرفته‌اید. اما اگر با معادله‌هایی از درجه‌ی بالاتر برخورد کردیم، باید چه‌کار کنیم؟ در مورد معادله‌های درجه سوم روش‌های حل مشخصی وجود دارد که جزء برنامه‌ی درسی شما نیست و به همین علت در مورد این روش‌ها حرف نمی‌زنیم. در مورد معادله‌های درجه چهارم و بالاتر روش حل مشخصی برای حل معادله در حالت کلی (یعنی هر معادله‌ی دلخواه!) نداریم. اما نکاتی در مورد حل معادله‌ها وجود دارد که خیلی جاها کمک می‌کنند تا بتوانیم این معادله‌ها را حل کنیم. بیایید با هم این نکته‌ها را ببینیم:

۱ **هر معادله‌ی چندجمله‌ای به شکل $ax^n+bx^{n-1}+\cdots+e=0$ اگر دارای ریشه‌ای گویا باشد، این ریشه‌ی گویا عددی است به شکل $\pm\frac{m}{n}$ که در آن m یکی از عامل‌های حاصل از تجزیه‌ی e (یعنی عدد ثابت معادله) و n یکی از عامل‌های حاصل از تجزیه‌ی a (یعنی ضریب جمله‌ی بزرگ‌ترین توان x) است. (البته اگر کسر $\frac{e}{a}$ قابل ساده‌کردن باشد، باید آن را ساده کنیم؛ طوری که صورت و مخرج نسبت به هم اول باشند.)**

از این نکته می‌توانیم برای پیداکردن ریشه‌های گویای هر معادله‌ی دلخواه استفاده کنیم.

۲ **اگر عدد $x=a$ ریشه‌ی معادله باشد، معادله بر $x-a$ بخش‌پذیر است و برای پیداکردن بقیه‌ی ریشه‌های معادله کافی است معادله را بر $x-a$ تقسیم کنیم و خارج قسمت را برابر صفر قرار دهیم.**

۳ **گاهی اوقات ممکن است برای حل معادله آن را به شکل اتحاد مربع یا مکعب یا در حالت کلی دوجمله‌ای $(a\pm b)^n$ تبدیل کنیم.**

۴ **بعضی از معادله‌ها با اتحادهای شرطی حل می‌شوند. یکی از مهم‌ترین اتحادهای شرطی این است: اگر $a+b+c=0$ باشد، $a^3+b^3+c^3=3abc$.**

مثال معادله‌ی $x^4-2x^2-3x-2=0$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) هیچ ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

گزینه۲ $\frac{e}{a}$ برابر $\frac{-2}{1}$ است و چون شمارنده‌ی عدد ۲ اعداد ۱ و ۲ و شمارنده‌ی عدد ۱ فقط عدد ۱ است، پس ریشه‌های گویای معادله فقط می‌توانند ±1 یا ±2 باشند، این عددها را در معادله امتحان می‌کنیم:

$$x^4-2x^2-3x-2=0$$

$x=1 \Rightarrow 1-2-3-2\neq0$ $x=-1 \Rightarrow 1-2+3-2=0$ ✓

$x=2 \Rightarrow 16-8-6-2=0$ ✓ $x=-2 \Rightarrow 16-8+6-2\neq0$

پس $x=-1$ و $x=2$ ریشه‌های معادله‌اند. برای پیداکردن بقیه‌ی ریشه‌ها آن را بر $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{rl} x^4-2x^2-3x-2 & \big|\ x^2-x-2 \\ -\ (x^4-x^3-2x^2) & \quad x^2+x+1 \\ \hline x^3-3x-2 & \\ -\ (x^3-x^2-2x) & \\ \hline x^2-x-2 & \\ -\ (x^2-x-2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow x^2+x+1=0$ جواب‌ندارد

پس معادله فقط دو ریشه دارد.

مثال معادله‌ی $x^۳-۹x^۲+۲۷x-۳۵=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

گزینه۲ اگر به $x^۳-۹x^۲+۲۷x$ با دقت نگاه کنید، می‌بینید که شبیه $(a-b)^۳$ است، پس:

$$x^۳-۹x^۲+۲۷x-۲۷-۸=۰ \Rightarrow (x-۳)^۳-۸=۰ \Rightarrow (x-۳)^۳=۸ \Rightarrow (x-۳)=۲ \Rightarrow x=۵$$

پس معادله فقط یک ریشه دارد.

مثال مجموع ریشه‌های معادله‌ی $(x-۲)^۳-(۳x+۵)^۳+(۲x+۷)^۳=۰$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱۷}{۶}$ ۲) $-\frac{۱۷}{۶}$ ۳) $\frac{۱۹}{۶}$ ۴) $-\frac{۱۹}{۶}$

گزینه۴ اگر معادله را به شکل $(x-۲)^۳+(-۳x-۵)^۳+(۲x+۷)^۳=۰$ بنویسیم و فرض کنیم $x-۲=a$، $-۳x-۵=b$ و $۲x+۷=c$، داریم $a+b+c=۰$ پس $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$ و در نتیجه:

$$۳(x-۲)(-۳x-۵)(۲x+۷)=۰ \Rightarrow x=۲\ ,\ x=-\frac{۵}{۳}\ ,\ x=-\frac{۷}{۲}$$

پس مجموع ریشه‌های معادله برابر است با:

$$۲-\frac{۵}{۳}-\frac{۷}{۲}=\frac{۱۲-۱۰-۲۱}{۶}=-\frac{۱۹}{۶}$$

معادله‌های گنگ

معادله‌ی گنگ یعنی معادله‌ای که شامل رادیکال است. برای حل این معادله‌ها این کارها را می‌کنیم:

۱ قبل از هر چیز می‌رویم سراغ دامنه‌ی معادله. برای تعیین دامنه باید تمام عبارت‌های زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج و تمام عبارت‌های برابر با رادیکال با فرجه‌ی زوج را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم. در طی حل معادله هم هر وقت عبارتی برابر رادیکال با فرجه‌ی زوج باشد، باید آن را هم بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم. اشتراک جواب این نامعادله‌ها می‌شود دامنه‌ی معادله.

۲ با توجه به فرجه‌ی رادیکال، طرفین را به توان فرجه می‌رسانیم و چون معمولن با رادیکال‌های فرجه‌ی ۲ سروکار داریم، باید طرفین به توان ۲ برسند. این به توان ۲ رساندن را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا به یک معادله‌ی درجه اول یا درجه دوم برسیم و آن را حل کنیم.

۳ گاهی اوقات با به توان رساندن طرفین ممکن است به معادله‌هایی از درجه‌ی ۴ و بیشتر برسیم. در این حالت معمولن می‌شود از انتخاب مجهول معاون استفاده کنیم. یعنی قسمتی از عبارت را برابر متغیر جدیدی مثل t فرض می‌کنیم تا با به توان رساندن، با توان‌های کوچک‌تری سروکار داشته باشیم.

حالا بیایید با هم چند مثال ببینیم:

مثال معادله‌ی $\sqrt{x^۲-x-۶}+x^۲=۱$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) چهار

گزینه۱ اگر معادله را به شکل $\sqrt{x^۲-x-۶}=۱-x^۲$ بنویسیم، برای پیداکردن دامنه باید عبارت زیر رادیکال و عبارت مساوی رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$\begin{cases} x^۲-x-۶\ge ۰ \Rightarrow x\le -۲ \text{ یا } x\ge ۳ \\ ۱-x^۲\ge ۰ \Rightarrow -۱\le x\le ۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing$$

دامنه‌ی معادله تهی است؛ پس معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال معادله‌ی $۲x-\sqrt{x+۱}=۴$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

گزینه۲ اگر معادله را به شکل $۲x-۴=\sqrt{x+۱}$ بنویسیم، دامنه‌اش می‌شود:

$$\begin{cases} x+۱\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۱ \\ ۲x-۴\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x\ge ۲$$

حالا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۴x^۲-۱۶x+۱۶=x+۱ \Rightarrow ۴x^۲-۱۷x+۱۵=۰ \Rightarrow x=\frac{۱۷\pm\sqrt{۲۸۹-۲۴۰}}{۸}=\frac{۱۷\pm ۷}{۸} \Rightarrow x=۳\ ,\ x=\frac{۵}{۴}$$

ریشه‌ی $x=\frac{۵}{۴}$ با توجه به دامنه‌ی $x\ge ۲$ قابل قبول نیست؛ پس معادله فقط یک ریشه $(x=۳)$ دارد.

مثال حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\sqrt{x^۲-۳x}=x^۲-۳x-۲$ چیست؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۴ ۴) ۴

گزینه۳ دامنه‌ی معادله برابر اشتراک مجموعه‌جواب نامعادله‌های $x^۲-۳x\geq ۰$ و $x^۲-۳x-۲\geq ۰$ است، پس:

$$x^۲-۳x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\leq \frac{۳-\sqrt{۱۷}}{۲} \text{ یا } x\geq \frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲}$$

برای آن‌که با به توان ۲ رساندن با یک معادله‌ی درجه ۴ روبه‌رو نشویم، فرض می‌کنیم $x^۲-۳x-۲=t$، پس:

$$\sqrt{t+۲}=t \xrightarrow{\text{توان}۲} t+۲=t^۲ \Rightarrow t^۲-t-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=-۱ \\ t=۲ \end{cases}$$

با توجه به این‌که باید $t\geq ۰$ باشد، پس $t=-۱$ قابل قبول نیست. معادله‌ی $t=۲$ را تشکیل می‌دهیم: $x^۲-۳x-۲=۲ \Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰$

نیاز به حل معادله نیست، چون فقط حاصل‌ضرب ریشه را می‌خواهیم که می‌شود $\frac{c}{a}=-۴$.

مثال معادله‌ی $\sqrt{x}-\sqrt{x-۳+۲\sqrt{x-۴}}=۱$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) چهار

گزینه۲ معادله را به شکل $\sqrt{x-۳+۲\sqrt{x-۴}}=\sqrt{x}-۱$ می‌نویسیم. اول سعی می‌کنیم تا عبارت زیر رادیکال را با استفاده از اتحاد ساده کنیم:

$$\sqrt{x-۳+۲\sqrt{x-۴}}=\sqrt{(x-۴)+۲\sqrt{x-۴}+۱}=\sqrt{(\sqrt{x-۴}+۱)^۲}=\sqrt{x-۴}+۱$$

پس معادله به شکل $\sqrt{x}-۱=\sqrt{x-۴}+۱$ درمی‌آید. دامنه‌ی معادله $x\geq ۴$ است؛ حالا عبارت را مرتب می‌کنیم و به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x-۴}=\sqrt{x}-۲ \xrightarrow{\text{توان}۲} x-۴=x-۴\sqrt{x}+۴ \Rightarrow \sqrt{x}=۲ \Rightarrow x=۴$$

پس معادله فقط یک ریشه دارد.

استفاده از رسم برای پیدا کردن ریشه‌ها (حل هندسی معادله)

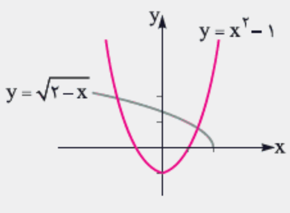
بعضی وقت‌ها (مخصوصن اگر فقط تعداد ریشه‌ها موردنظر باشد) می‌توانیم معادله را به شکل $f(x)=g(x)$ تبدیل کنیم و نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم. تعداد ریشه‌های معادله همان تعداد نقاط برخورد دو نمودار است.

مثال معادله‌ی $\sqrt{۲-x}-x^۲+۱=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی

۳) دو ریشه‌ی مثبت ۴) دو ریشه‌ی منفی

گزینه۲ معادله را به شکل $\sqrt{۲-x}=x^۲-۱$ می‌نویسیم و نمودار دو تابع $y=\sqrt{۲-x}$ و $y=x^۲-۱$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

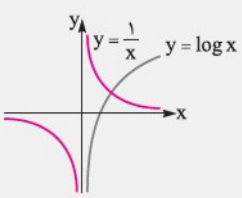


همان‌طور که در شکل می‌بینیم، دو نمودار یکدیگر را در دو نقطه، یکی با طول مثبت و دیگری با طول منفی، قطع می‌کنند؛ پس معادله یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی دارد.

مثال معادله‌ی $x\log x=۱$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

گزینه۲ معادله را به شکل $\log x=\frac{۱}{x}$ می‌نویسیم و نمودار دو تابع $y=\log x$ و $y=\frac{۱}{x}$ را رسم می‌کنیم:

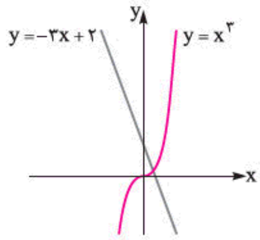


همان‌طور که در شکل می‌بینیم، دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؛ پس معادله فقط یک ریشه دارد.

مثال معادله‌ی $x^3+3x-2=0$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

گزینه۲ معادله را به شکل $x^3=-3x+2$ می‌نویسیم و نمودار دو تابع $y=x^3$ و $y=-3x+2$ را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که در شکل می‌بینیم، دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

نامعادله‌ها

تعیین علامت

یکی از روش‌های اصلی حل نامعادله‌ها، تعیین علامت عبارت‌های جبری است. برای تعیین علامت یک عبارت جبری (به هر شکلی که باشد)، کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف ریشه‌ی عبارت‌ها را (چه در صورت و چه در مخرج) پیدا می‌کنیم.

ب مرتبه‌ی ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم.

پ ریشه‌ها را به ترتیب در جدول تعیین علامت می‌نویسیم و ریشه‌های با مرتبه‌ی زوج را مشخص می‌کنیم (ما در این کتاب برای مشخص‌کردنشان، بالایشان یک * می‌گذاریم).

ت عبارت در ریشه‌های صورت برابر صفر و در ریشه‌های مخرج تعریف‌نشده است. (بعضی‌ها روی خط ریشه‌های مخرج می‌نویسند ت.ن (تعریف‌نشده) ولی ما براساس آن‌چه متداول شده (ولی درست نیست) نماد ∞ می‌گذاریم.)

ث علامت ضریب بزرگ‌ترین توان x را در صورت (بعد از ضرب‌کردن عامل‌ها) و علامت ضریب بزرگ‌ترین توان x را در مخرج، در هم ضرب می‌کنیم و نتیجه را می‌گذاریم توی اولین خانه‌ی سمت راست جدول.

ج به سمت چپ حرکت می‌کنیم و با عبور از هر ریشه‌ی مرتبه‌ی فرد، علامت را عوض می‌کنیم؛ ولی با عبور از ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج علامت را عوض نمی‌کنیم.

چ ریشه‌ی قدرمطلق مثل ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج عمل می‌کند.

برای حل یک نامعادله با روش تعیین علامت، اول همه‌ی اجزا را می‌آوریم یک‌طرف تا به یک نامعادله به شکل $A>0$ یا $A<0$ برسیم و سپس عبارت A را تعیین علامت می‌کنیم و با توجه به جهت نامعادله، مجموعه‌جواب را انتخاب می‌کنیم.

مثال مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\frac{x+6}{x+2}-\frac{x+1}{x-1}>1$، شامل چند عدد صحیح است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

گزینه۳ اول همه‌ی عوامل را می‌آوریم یک‌طرف و مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+6}{x+2}-1>0 \Rightarrow \frac{x^2+3x+2-x^2-5x+6-x^2-x+2}{(x-1)(x+2)}>0 \Rightarrow \frac{-x^2-3x+10}{(x-1)(x+2)}>0$$

$$-x^2-3x+10=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \;① \\ x=2 \;① \end{cases} \qquad (x-1)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \;① \\ x=-2 \;① \end{cases}$$

x	$-\infty$		-5		-2		1		2		$+\infty$
		$-$	0	$+$	∞	$-$	∞	$+$	0	$-$	

با توجه به جهت نامعادله، مجموعه‌جواب برابر است با $1<x<2$ یا $-5<x<-2$ که شامل اعداد صحیح -4 و -3 یعنی دو عدد صحیح است.

مثال طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که نامساوی $\frac{x^4-3x+2}{(x-1)(x-2)}\leq 1$ در آن برقرار است، برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

گزینه۳ اول همه را می‌آوریم یک‌طرف و مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^4-3x+2}{x^2-3x+2}-1\leq 0 \Rightarrow \frac{x^4-3x+2-x^2+3x-2}{x^2-3x+2}\leq 0 \Rightarrow \frac{x^4-x^2}{x^2-3x+2}\leq 0$$

حالا کسر به دست آمده را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ①} \\ x=2 \text{ ①} \end{cases} \qquad x^4-x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ②} \\ x=1 \text{ ①} \\ x=-1 \text{ ①} \end{cases}$$

دقت کنید که چون ریشه‌ی $x=1$ دو بار (یک بار در صورت و یک بار در مخرج) به دست آمده، پس مرتبه‌ی ریشه‌ی $x=1$ زوج است؛ یعنی دو ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج داریم: یکی $x=0$ و دیگری $x=1$:

x	$-\infty$		-1		$\overset{*}{0}$		$\overset{*}{1}$		2		$+\infty$
		+	0	−	0	−	∄	−	∄	+	

بنابراین بازه‌های جواب نامعادله عبارت‌اند از $[-1,1)$ و $(1,2)$؛ پس طول بزرگ‌ترین بازه‌ی جواب نامعادله برابر طول بازه‌ی $[-1,1)$ یعنی ۲ است.

اگر بخواهیم عبارت درجه دوم ax^2+bx+c همواره مثبت یا همواره منفی یا همواره نامنفی یا همواره نامثبت باشد، باید داشته باشیم:

$\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$ همواره مثبت (بزرگ‌تر از صفر) — $\begin{cases}\Delta<0\\ a<0\end{cases}$ همواره منفی (کوچک‌تر از صفر)

$\begin{cases}\Delta\le 0\\ a>0\end{cases}$ همواره نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) — $\begin{cases}\Delta\le 0\\ a<0\end{cases}$ همواره نامثبت (کوچک‌تر یا مساوی صفر)

مثال اگر نمودار تابع $y=(m+3)x^2+2mx+4$ به ازای تمام مقادیر x بالای محور xها قرار گیرد، حدود m کدام است؟

۱) $-3<m<2$ ۲) $-3<m<6$ ۳) $-3<m<-2$ ۴) $-2<m<6$

گزینه ۴ با توجه به چیزهایی که در مورد تعیین علامت گفتیم، برای آن‌که عبارت درجه دوم ax^2+bx+c همواره مثبت باشد، باید ریشه نداشته باشد؛ یعنی $\Delta<0$ و از طرفی عبارت هم‌علامت ضریب x^2 یعنی a است یعنی برای مثبت‌بودن عبارت، باید $a>0$ باشد:

$$\Delta<0 \Rightarrow 4m^2-16(m+3)<0 \Rightarrow 4(m^2-4m-12)<0 \Rightarrow -2<m<6$$

$$a>0 \Rightarrow m+3>0 \Rightarrow m>-3$$

و اشتراک دو بازه‌ی $-2<m<6$ و $m>-3$ می‌شود: $-2<m<6$.

برای حل نامعادله‌ها در حالت کلی علاوه بر روش تعیین علامت می‌توانیم از خواص نامساوی‌ها هم استفاده کنیم. در این روش، نامعادله را با استفاده از خواص نامساوی‌ها ساده می‌کنیم تا به یک نامعادله‌ی ساده‌تر تبدیل شود.

خواص نامساوی‌ها را قبلن دیده‌اید ولی این هم یک دوره‌ی کوچک فقط برای یادآوری:

۱ خاصیت تعدی: یعنی از دو نامساوی، نامساوی سومی را نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases}a<b\\ b<c\end{cases} \Rightarrow a<c$$

۲ جمع با عدد ثابت: دو طرف نامساوی را می‌توانیم با هر عددی (چه مثبت و چه منفی) جمع کنیم:

$$a<b \Rightarrow a+c<b+c$$

۳ جمع دو نامساوی هم‌جهت:

$$\begin{cases}a<b\\ c<d\end{cases} \Rightarrow a+c<b+d$$

۴ ضرب (یا تقسیم) در عدد مثبت: جهت نامساوی تغییر نمی‌کند:

$$\begin{cases}a<b\\ c>0\end{cases} \Rightarrow ac<bc$$

۵ ضرب (یا تقسیم) در عدد منفی: جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$\begin{cases}a<b\\ c<0\end{cases} \Rightarrow ac>bc$$

۶ معکوس‌کردن دو طرف: اگر هر دو طرف هم‌علامت باشند، جهت عوض می‌شود و اگر دو طرف علامت مختلف داشته باشند، جهت عوض نمی‌شود.

$$\begin{cases}a<b\\ ab<0\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b} \qquad \begin{cases}a<b\\ ab>0\end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$$

۷ به توان فرد رساندن: جهت عوض نمی‌شود:

$$a<b \Leftrightarrow a^{2n+1}<b^{2n+1}$$

۸ به توان زوج رساندن:

اگر هر دو طرف مثبت باشند، جهت عوض نمی‌شود:

$$\begin{cases}a<b\\ a,b>0\end{cases} \Rightarrow a^{2n}<b^{2n}$$

اگر هر دو طرف منفی باشند، جهت عوض می‌شود:

$$\begin{cases} a<b \\ a,b<0 \end{cases} \Rightarrow a^{2n}>b^{2n}$$

اگر یک طرف مثبت و یک طرف منفی باشد، جهت نامساوی با توجه به قدرمطلق طرفین تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} a<b \\ a<0,\ b>0 \Rightarrow a^{2n}<b^{2n} \\ |a|<|b| \end{cases} \qquad \begin{cases} a<b \\ a<0,\ b>0 \Rightarrow a^{2n}>b^{2n} \\ |a|>|b| \end{cases}$$

مثال اگر مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\frac{x^3+2x^2+x+2}{x^4+x^2}>1$ برابر بازه‌ی (a,b) باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۳

گزینه۴ چون $x^4+x^2>0$ است (نمی‌تواند مساوی صفر باشد)، پس طرفین را در x^4+x^2 ضرب می‌کنیم و سعی می‌کنیم دو طرف را تجزیه کنیم:

$$x^3+2x^2+x+2>x^4+x^2 \Rightarrow (x^3+x)+(2x^2+2)>x^2(x^2+1) \Rightarrow x(x^2+1)+2(x^2+1)>x^2(x^2+1) \Rightarrow (x^2+1)(x+2)>x^2(x^2+1)$$

چون x^2+1 مثبت است، پس طرفین را بر x^2+1 تقسیم می‌کنیم:

$$\Rightarrow x+2>x^2 \Rightarrow x^2-x-2<0 \Rightarrow -1<x<2$$

پس مجموعه‌جواب نامعادله، بازه‌ی $(-1,2)$ است و در نتیجه $b-a=3$.

نامعادلات رادیکالی

برای حل نامعادلات رادیکالی (به ویژه وقتی فرجه زوج باشد) مثل معادله عمل می‌کنیم. **اولن باز هم توجه به دامنه الزامی است و ثانین وقتی می‌خواهیم طرفین را به توان ۲ برسانیم باید به دامنه و علامت عبارت‌ها توجه کنیم.** در دو حالت خاص زیر بهتر است به این نکات توجه کنیم:

الف **برای حل نامعادله‌ی $\sqrt{A}<B$ باید شرط‌های $B>0$ و $A\geq 0$ برقرار باشند. مجموعه‌جواب نامعادله برابر اشتراک بازه‌ی به دست آمده از ساده‌کردن نامعادله و بازه‌های حاصل از این شرط‌ها است.**

ب برای حل نامعادله‌ی $\sqrt{A}>B$ حل نامعادله را به دو حالت افراز می‌کنیم. در حالت اول که $B<0$ و $A\geq 0$ است تمام بازه‌های به دست آمده جزء مجموعه‌جواب است. در حالت دوم که $B\geq 0$ و $A\geq 0$ باید نامعادله را ساده و حل کنیم.

بیایید این دو را در حل مثال‌های زیر ببینیم.

مثال اگر مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x^2-2x}\leq x+4$ برابر $[a,b]\cup[c,+\infty)$ باشد، $a+b+c$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $\frac{4}{5}$

گزینه۲ اول دامنه را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2-2x\geq 0 \Rightarrow x\leq 0 \text{ یا } x\geq 2 \\ x+4\geq 0 \Rightarrow x\geq -4 \end{cases} \xrightarrow{\cap} -4\leq x\leq 0 \text{ یا } x\geq 2$$

حالا با توجه به این‌که هر دو طرف مثبت‌اند، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^2-2x\leq x^2+8x+16 \Rightarrow -10x\leq 16 \Rightarrow x\geq -\frac{8}{5}$$

پس مجموعه‌جواب نامعادله برابر اشتراک $(x\geq -\frac{8}{5})$ و $(x\geq 2$ یا $-4\leq x\leq 0)$ یعنی برابر $[-\frac{8}{5},0]\cup[2,+\infty)$ است؛ یعنی $a=-\frac{8}{5}$ و $b=0$ و $c=2$ و در نتیجه: $a+b+c=\frac{2}{5}$

مثال اگر مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x^2-4x}\geq x-3$ برابر $\mathbb{R}-(a,b)$ باشد، $a+b$ برابر کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{9}{2}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{11}{2}$

گزینه۱ دو حالت در نظر می‌گیریم.

الف) با این فرض که $x-3\leq 0$ و $x^2-4x\geq 0$ باشد؛ تمام جواب این حالت خود مجموعه‌جواب نامعادله است:

$$\begin{cases} x^2-4x\geq 0 \Rightarrow x\leq 0 \text{ یا } x\geq 4 \\ x-3\leq 0 \Rightarrow x\leq 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x\leq 0$$

پس بازه‌ی $(-\infty,0]$ جزء مجموعه‌جواب است.

ب) با این فرض که $x-۳\ge ۰$ و $x^۲-۴x\ge ۰$ باشد:

$$\begin{cases} x^۲-۴x\ge ۰ \Rightarrow x\le ۰ \ \text{یا}\ x\ge ۴ \\ x-۳\ge ۰ \Rightarrow x\ge ۳ \end{cases} \xrightarrow{\ \cap\ } x\ge ۴$$

حالا نامعادله را با شرط $x\ge ۴$ حل می‌کنیم. دو طرف را که مثبت‌اند به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^۲-۴x\ge x^۲-۶x+۹ \Rightarrow ۲x\ge ۹ \Rightarrow x\ge \frac{۹}{۲}$$

جواب این قسمت برابر اشتراک $(x\ge ۴)$ و $(x\ge \frac{۹}{۲})$ یعنی برابر $x\ge \frac{۹}{۲}$ است. پس مجموعه‌جواب نامعادله برابر است با $(-\infty,۰]\cup[\frac{۹}{۲},+\infty)$ یا $\mathbb{R}-(۰,\frac{۹}{۲})$

یعنی $a=۰$ و $b=\frac{۹}{۲}$ و در نتیجه: $a+b=\frac{۹}{۲}$

مثال مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۲}\le ۳$، بازه‌ی (a,b) است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

گزینه۲ دامنه‌ی نامعادله $x\ge ۲$ است. طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x+۱+x-۲+۲\sqrt{(x+۱)(x-۲)}\le ۹ \Rightarrow ۲\sqrt{(x+۱)(x-۲)}\le ۱۰-۲x \Rightarrow \sqrt{x^۲-x-۲}\le ۵-x$$

عبارت $۵-x$ هم باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، پس $۵-x\ge ۰$ و در نتیجه $x\le ۵$؛ پس دامنه‌ی نامعادله می‌شود $۲\le x\le ۵$. باز هم طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^۲-x-۲\le ۲۵-۱۰x+x^۲ \Rightarrow ۹x\le ۲۷ \Rightarrow x\le ۳$$

حالا با توجه به دامنه، مجموعه‌جواب نامعادله می‌شود: $۲\le x\le ۳$

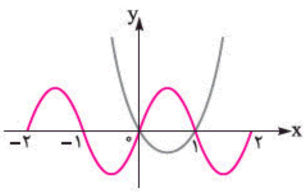
حل نامعادلات به روش هندسی

اگر بتوانیم نامعادله را به شکل $f(x)<g(x)$ تبدیل کنیم و رسم نمودار تابع‌های $y=f(x)$ و $y=g(x)$ نسبتن ساده باشد، می‌توانیم جواب نامعادله را با رسم نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ پیدا کنیم. در این روش گاهی اوقات لازم است طول نقاط برخورد دو نمودار را برای تعیین دقیق بازه‌ی جواب پیدا کنیم.

از روش رسم معمولن برای حل نامعادلاتی استفاده می‌کنیم که با استفاده از روش‌های دیگر به عبارت‌هایی می‌رسند که قابل ساده‌شدن یا تعیین علامت نیستند.

مثال مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $x^۲<x+\sin\pi x$ برابر بازه‌ی (a,b) است. بیشترین مقدار $b-a$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

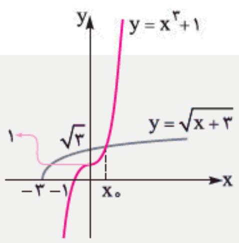


گزینه۳ نامعادله را به شکل $x^۲-x<\sin\pi x$ می‌نویسیم و نمودار دو تابع $y=x^۲-x$ و $y=\sin\pi x$ را رسم می‌کنیم:

همان‌طور که در شکل می‌بینیم، نمودار تابع $y=x^۲-x$ در بازه‌ی $(۰,۱)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y=\sin\pi x$ است؛ پس مجموعه‌جواب نامعادله بازه‌ی $(۰,۱)$ و $b-a$ برابر ۱ است.

مثال اگر مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x+۳}>x^۳+۱$، بازه‌ی (a,b) باشد، $b-a$ برابر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵



گزینه۳ نمودار دو تابع $y=\sqrt{x+۳}$ و $y=x^۳+۱$ را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل و دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{x+۳}$، می‌بینیم که مجموعه‌جواب بازه‌ی $(-۳,x_۰)$ است. $x_۰$ طول نقطه‌ی برخورد دو منحنی است که با عددگذاری می‌بینیم که عرض نقطه‌ی $x=۱$ در هر دو تابع برابر ۲ است؛ پس $x_۰=۱$ و مجموعه‌جواب نامعادله، بازه‌ی $(-۳,۱)$ و در نتیجه $b-a=۴$ است.

پرسش‌های ب.م.م و ک.م.م عبارت‌های جبری ـ معادله و نامعادله

۱- بزرگ‌ترین عامل مشترک دو عبارت $x^2-2xy-15y^2$ و $x^2+7xy+12y^2$ کدام است؟

۱) $x-2y$ ۲) $x+3y$ ۳) $x+4y$ ۴) $x+6y$

۲- مقدار ک.م.م دو چندجمله‌ای x^3-x^2-x+1 و x^3+x^2-x-1 به ازای $x=2$ برابر کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۹

۳- ب.م.م دو چندجمله‌ای $2x^3-3x^2+1$ و $3x^3-7x^2+5x-1$ کدام است؟

۱) x^2-3x+2 ۲) x^2+x-1 ۳) x^2-1 ۴) $(x-1)^2$

۴- ک.م.م دو چندجمله‌ای $2x^2-3x+1$ و $2x^2+x-1$ کدام است؟

۱) $2x^3+x^2-2x+1$ ۲) $2x^3+x^2-2x-1$ ۳) $2x^3-x^2-2x+1$ ۴) $2x^3-x^2-2x-1$

۵- اگر $P(x)$ کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عبارت $x^3-2ax^2-4x+8a$ و $x^3-2x^2-b^2x+2b^2$ باشد، سایر ریشه‌های معادله‌ی $P(x)=0$ علاوه بر $2a$ کدام است؟

۱) $\pm 2, \pm b$ ۲) $\pm a, \pm b$ ۳) $\pm b, a$ ۴) $2, a, b$

۶- اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای با کوچک‌ترین ضرایب و توان صحیح باشد که در تقسیم بر چندجمله‌ای‌های x^2+x-2 و x^2-4x+3 باقی‌مانده‌ای برابر $2x-1$ داشته باشد، $f(0)$ برابر کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۷- اگر $P(x)$ برابر ب.م.م دو چندجمله‌ای x^4+4 و x^3-2x+4 باشد، $P(-2)$ برابر کدام است؟

۱) صفر ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۸- مجموع ارقام بزرگ‌ترین جمله‌ی مشترک سه‌رقمی دو دنباله‌ی حسابی $1,5,9,\dots$ و $2,7,12,\dots$ برابر کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۲ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

۹- یک استخر می‌تواند با سه شیر آب A، B و C به ترتیب در ۶، ۳ و ۲ ساعت پر شود. اگر اجازه داشته باشیم فقط دوتا از شیرها را باز کنیم، کم‌ترین زمان لازم برای پرشدن استخر چه‌قدر است؟

۱) ۱ ساعت و ۶ دقیقه ۲) ۱ ساعت و ۱۰ دقیقه ۳) ۱ ساعت و ۱۲ دقیقه ۴) ۱ ساعت و ۱۵ دقیقه

۱۰- ۱۴۴ لیتر آب‌پرتقال، ۴۵ لیتر آب‌سیب و ۶۳ لیتر آب‌انگور در پاکت‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی شده‌اند. حداقل تعداد پاکت‌ها کدام است؟ (گنجایش پاکت‌ها برحسب لیتر عدد طبیعی است)

۱) ۱۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۸

۱۱- کف یک اتاق مستطیل‌شکل با طول و عرض ۵/۴ و ۲/۵۲ متر را می‌خواهیم با سرامیک‌های مربع‌شکل فرش کنیم. اگر بخواهیم کم‌ترین تعداد سرامیک‌ها را به کار ببریم، مساحت هر تکه‌ی سرامیک برحسب سانتی‌متر مربع چه‌قدر باید باشد؟

۱) ۱۰۲۴ ۲) ۱۲۹۶ ۳) ۱۲۲۵ ۴) ۱۱۵۶

۱۲- سه دونده در یک مسیر دور یک شهر می‌دوند. هر یک به ترتیب یک دور مسیر را در ۱۲، ۱۶ و ۱۸ دقیقه طی می‌کنند. اگر در شروع حرکت هر سه در یک نقطه قرار داشته باشند، حداقل پس از چه زمانی هر سه با هم به همان نقطه می‌رسند؟

۱) ۹۶ ۲) ۹۸ ۳) ۱۲۴ ۴) ۱۴۴

۱۳- سه دایره‌ی روبه‌رو با سرعت‌های ۱۰، ۱۸ و ۲۲ دور در دقیقه می‌چرخند. اگر چرخش در لحظه‌ای که قطرهای افقی سه دایره در یک امتداد شروع شود، پس از گذشت حداقل چه زمانی این سه قطر در یک امتداد قرار می‌گیرند؟

۱) ۱۵ ثانیه ۲) ۱۵ دقیقه ۳) ۹۹۰ ثانیه ۴) ۹۹۰ دقیقه

۱۴- یک استخر می‌تواند با سه شیر آب A، B و C به ترتیب در ۴، ۶ و ۳ ساعت پر شود. اگر هر سه شیر با هم باز باشند، استخر در چه زمانی پر می‌شود؟

۱) ۴۵ دقیقه ۲) ۱ ساعت و ۱۵ دقیقه ۳) ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه ۴) ۱ ساعت و نیم

۱۵- دو نقاش اگر با هم کار کنند، یک آپارتمان را در ۶ روز رنگ می‌کنند. اگر سرعت یکی از نقاشی‌ها ۱/۵ برابر سرعت دیگری باشد، نقاش سریع‌تر به تنهایی آپارتمان را در چند روز رنگ می‌کند؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۶- تقریبن چند کیلوگرم نمک به ۵۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک ۴ درصدی اضافه کنیم تا به یک محلول آب‌نمک ۸ درصدی تبدیل شود؟

۱) ۲ ۲) ۲/۷ ۳) ۲/۱۷ ۴) ۲/۴۱

۱۷- ۸۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک ۵ درصدی داریم. چند کیلوگرم از آب آن را باید تبخیر کنیم تا به یک محلول آب‌نمک ۸ درصدی برسیم؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

۱۸- با ۱۸۰۰۰۰ تومان می‌خواهیم تعدادی پرس چلوکباب بخریم. اگر بتوانیم برای هر پرس ۳۰۰۰ تومان تخفیف بگیریم، می‌توانیم ۱۰ پرس بیشتر بخریم. بدون تخفیف با این پول می‌توانستیم چند پرس چلوکباب بخریم؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۱۹- یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع رنگ با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم از این محلول، غلظت به ۵۰ درصد می‌رسد؟ *(خارج از کشور ریاضی ۹۲)*

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۶ ۴) ۰/۸

۲۰- از اتحاد $\frac{b}{x-2}+\frac{a}{x-1}=\frac{x+2}{x^2-3x+2}$، مقدار $a+\frac{b}{2}$ چه‌قدر است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) -2

۲۱- از اتحاد $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}\equiv\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}$، کدام نتیجه می‌شود؟

۱) $a+b+c=3$ ۲) $a+b+c=0$ ۳) $a+b+c=-6$ ۴) $a+b+c=2$

۲۲- اگر $abc=2$ باشد، حاصل کسر $\frac{b+6}{3ac+1}$ چه‌قدر است؟

۱) c ۲) a ۳) b ۴) ۲

۲۳- تعداد جواب‌های معادله‌ی $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۴- معادله‌ی $\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x-2}$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) ریشه‌ی حقیقی ندارد. ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲۵- معادله‌ی $3x-2=5\sqrt{1-9x^2}$:

۱) ریشه ندارد. ۲) یک ریشه‌ی مضاعف دارد. ۳) یک ریشه‌ی ساده دارد. ۴) دو ریشه دارد.

۲۶- معادله‌ی $\sqrt[5]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-3}=0$ دارای چند جواب حقیقی است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۲۷- تعداد جواب‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2-2)^2\sqrt{x^2+x}+(x^2-x)^{\frac{2}{3}}=0$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۸- معادله‌ی $\sqrt{2x-1}-x+2=0$ دارای چند ریشه‌ی حقیقی است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۲۹- معادله‌ی $x^4+x^2+\sqrt{x^2-1}=2$:

۱) دارای دو جواب است. ۲) دارای ریشه‌ی مضاعف است. ۳) دارای چهار جواب است. ۴) ریشه‌ی حقیقی ندارد.

۳۰- معادله‌ی $\sqrt[4]{x^3+x-10}+\sqrt{x^2-3x+2}=0$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) چهار

۳۱- معادله‌ی $(x^2+10x+21)(\sqrt{x+6}-x)=0$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) چهار ۲) سه ۳) دو ۴) یک

۳۲- معادله‌ی $x\sqrt{x-1}-x^2+3x=0$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۳۳- مجموع ریشه‌های معادله‌ی $2x=5\sqrt{x}-2$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) معادله ریشه ندارد.

۳۴- معادله‌ی $x-1=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۳۵- معادله‌ی $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=2$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۳۶- معادله‌ی $\sqrt{x+2}+3\sqrt{x}=3$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۳۷- معادله‌ی $\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{9x+7}$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۳۸- معادله‌ی $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=3$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۳۹- حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^2+4x+3=\sqrt{x^2+4x+5}$ کدام است؟ *(سراسری ریاضی ۹۴)*

۱) -2 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 4

۴۰- برای آن‌که معادله‌ی $\sqrt{x-2}+\sqrt{x}=k$ دارای جواب باشد، کدام گزاره درست است؟

۱) کافی است k مثبت باشد. ۲) لازم است k مثبت باشد.

۳) لازم و کافی است k مثبت باشد. ۴) نه لازم و نه کافی است که k مثبت باشد.

۴۱- اگر معادله‌ی $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=k$ دارای بی‌شمار ریشه باشد، k کدام است؟

۱) $k=0$ ۲) $k=1$ ۳) $k=2$ ۴) $k=3$

۴۲- معادله‌ی $\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x-2}=k$ به ازای چه مقادیر k دارای یک ریشه‌ی مثبت است؟

۱) $-1<k<1$ ۲) $0<k<1$ ۳) $k>1$ ۴) $k<-1$

۴۳- یک فروشنده از A عدد کالا، $\frac{A}{2}$ را به قیمت خرید، $\frac{A}{4}$ را برابر با نصف قیمت خرید و $\frac{A}{4}$ را دو برابر قیمت خرید فروخته است. این فروشنده چند درصد خرید سود برده است؟

۱) صفر ۲) ۷/۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲/۵

۴۴- ریشه‌ی معادله‌ی $x^3+3x^2+3x-1=0$ برابر است با:

۱) $-1-\sqrt[3]{2}$ ۲) $1+\sqrt[3]{2}$ ۳) $-1+\sqrt[3]{2}$ ۴) $1-\sqrt[3]{2}$

۴۵- معادله‌ی درجه سومی که ریشه‌هایش ۱، $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ است، کدام است؟

۱) $x^3-x^2-3x-3=0$ ۲) $x^3-x^2+3x-3=0$ ۳) $x^3-x^2-3x+3=0$ ۴) $x^3-4x^2+3=0$

۴۶- معادله‌ی $(3x+2)^3+(-4x+5)^3+(x-7)^3=0$ چند جواب حقیقی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) جواب ندارد.

۴۷- معادله‌ی $4x^4+x^2-3x+1=0$ دارای چند ریشه است؟

۱) یک ریشه‌ی مضاعف مثبت ۲) یک ریشه‌ی مثبت و یک ریشه‌ی منفی

۳) دو ریشه‌ی مثبت ۴) یک ریشه‌ی مضاعف منفی

۴۸- اگر a، b و c سه ریشه‌ی ناصفر معادله‌ی $x^3-bx^2+bx-3bc=0$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) 7 ۲) 1 ۳) -5 ۴) -9

۴۹- معادلات $x^3+7x+1=0$ و $x^4+x^2-1=0$ چند ریشه‌ی مشترک دارند؟

۱) یک ریشه ۲) دو ریشه ۳) سه ریشه ۴) ریشه‌ی مشترک ندارند.

۵۰- اگر نمودار تابع $f(x)=2x^3-5x^2-x+m$، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطه‌ی تلاقی دیگر آن با محور x ها کدام‌اند؟ *(خارج از کشور ریاضی ۸۹)*

۱) $-1,\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2},1$ ۳) $-1,\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2},3$

۵۱- اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x(ax^2-x-5)=2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟ *(خارج از کشور ریاضی ۸۷)*

۱) -2 ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۵۲- اگر $a>0$ باشد، معادله‌ی $x+\sqrt{x+1}=a$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) یک یا دو ۴) هیچ یا یک

۵۳- معادله‌ی $\sqrt{x}=x^2-4$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

۱) چهار ریشه ۲) دو ریشه ۳) یک ریشه ۴) سه ریشه

۵۴- معادله‌ی $\sqrt{1-x}-2=2x^2-4x$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) چهار

۵۵- معادله‌ی $x\sin x-1=0$ در فاصله‌ی $[0,2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) صفر ۲) 1 ۳) 2 ۴) 4

۵۶- معادله‌ی $\frac{\sin x}{x}=x^2-\pi^2$:

۱) سه ریشه دارد. ۲) دو ریشه دارد. ۳) دو ریشه‌ی مثبت دارد. ۴) دو ریشه‌ی منفی دارد.

۵۷- تعداد ریشه‌های معادله‌ی $x^2-\sin x=0$ برابر است با:

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۵۸- معادله‌ی $2^x=x^2$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۵۹- معادله‌ی $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=1$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۶۰- معادله‌ی $x^2+x-\sqrt{x+1}=10$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۶۱- معادله‌ی $\log(x+1)+\sqrt{x}-1=0$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۶۲- معادله‌ی $\log(\sin x)-\sin x=0$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۶۳- معادله‌ی $\sqrt{\sin x}-\tan x=0$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۶۴- عبارت $A=\frac{(1-x)(2+x)(x^2+1)}{(3-x)(x+1)}$ در کدام فاصله مثبت خواهد بود؟

۱) $-2<x<-1$ ۲) $-1<x<1$ ۳) $-2<x<1$ ۴) $1<x<3$

۶۵- به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a، هر نقطه از نمودار تابع $f(x)=(a-1)x^2+2\sqrt{2}x+a$، در بالای محور x ها است؟ *(خارج از کشور ریاضی ۸۹)*

۱) $a<-1$ ۲) $a>1$ ۳) $a>2$ ۴) $1<a<2$

۶۶- مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\frac{x^2+x+3}{2x^2-x}>1$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۶۷- به ازای کدام مقادیر m، عبارت $(m-1)x^2+6x+2m+1$، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟ *(خارج از کشور ریاضی ۹۰)*

۱) $m<-2$ ۲) $m>2/5$ ۳) $1<m<2$ ۴) $1<m<2/5$

۶۸- اگر عبارت $(a-1)x^2+(a-1)x+1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟ *(سراسری ریاضی ۹۱)*

۱) $\{a:1<a<5\}$ ۲) $\{a:a<1\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\mathbb{R}$

۶۹- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3-4x^2-x+4\,;\,x>-1$، در بازه‌ی (a,b) زیر محور x ها است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) 5 ۲) 3 ۳) 4 ۴) 2 *(سراسری ریاضی ۸۸)*

۷۰- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{3x^2-2x}{x^2+4}$، در بازه‌ی (a,b) پایین‌تر از خط به معادله‌ی $y=2$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) 4 ۲) 6 ۳) 8 ۴) ∞ *(خارج از کشور ریاضی ۸۸)*

۷۱- به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(m+2)x^2-2mx+1$ همواره در بالای محور x ها است؟ *(خارج از کشور ریاضی ۸۵)*

۱) $m>-2$ ۲) $-2<m<-1$ ۳) $-2<m<2$ ۴) $-1<m<2$

۷۲- اگر مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\frac{x}{2}<\frac{x^2-x}{x^2+x-2}$ به صورت $(-2,+\infty)-A$ باشد، مجموعه‌ی A چند عضو دارد؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۷۳- اگر مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\frac{۳x^{۲}-۵}{x^{۲}+x+۱}<x-۱$ به شکل $(a,b)\cup(b,+\infty)$ باشد، $b-a$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷۴- مجموع طول‌های بازه‌های مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\frac{x+۱}{x}-\frac{x}{x-۱}\ge\frac{۹}{۲}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۷۵- مجموعه‌جواب حقیقی نامعادله‌ی $(\frac{۱}{۳}x+۴)(۱+\sqrt{x})<x+x\sqrt{x}$ کدام است؟

۱) $\{x:x>۰\}$ ۲) $\{x:x>۸\}$ ۳) $\{x:۶<x<۸\}$ ۴) $\{x:x>۶\}$

۷۶- مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\frac{۲}{\sqrt{x}-۱}\le\sqrt{x}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) دو ۲) سه ۳) چهار ۴) بی‌شمار

۷۷- اگر مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x-۱+۲\sqrt{x-۲}}>x-۱$ بازه‌ی (a,b) باشد، $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۷۸- مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x-۲-۲\sqrt{x-۳}}<\sqrt{x}-۲$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) هیچ ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

۷۹- مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x+۲}+\sqrt{x-۱}\le۳$ کدام است؟

۱) $(۱,۴)$ ۲) $(۲,۴)$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $(۲,۳)$

۸۰- اگر مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\frac{\sqrt{x-۳}-۱}{\sqrt{x}+۲}+۲\ge\sqrt{x}$ بازه‌ی $[a,b]$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷ ۴) ۷/۵

۸۱- در کدام فاصله نامساوی $x^{۴}+x+۱<۰$ برقرار است؟

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $(-\infty,۰)$ ۳) $(-\infty,+\infty)$ ۴) $\varnothing$

۸۲- اگر مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $x\sqrt{x+۱}<\sqrt{۲}$ بازه‌ی $[a,b)$ باشد، $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۸۳- مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\log_{۲}x-\sin\pi x<۰$ کدام است؟

۱) $(۰,\frac{۱}{۲})$ ۲) $(\frac{۱}{۲},۱)$ ۳) $(۰,۲)$ ۴) $(۰,۱)$

۸۴- اگر $x\le۱$، طول بازه‌ی مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\frac{۱}{x+۱}\le x^{۲}-۱$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $۲+\sqrt{۲}$ ۳) $۱+\sqrt{۲}$ ۴) $۲+\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۸۵- مجموع طول بازه‌های مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\sin\pi x<\sin\frac{\pi}{۲}x$ در بازه‌ی $[۰,۴]$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱- **گزینه۲** هر دو عبارت را با استفاده از اتحاد جمله‌ی مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2+7xy+12y^2=(x+3y)(x+4y)\\ x^2-2xy-15y^2=(x+3y)(x-5y)\end{cases} \Rightarrow \text{ب.م.م}=x+3y$$

۲- **گزینه۴** هر دو چندجمله‌ای را با دسته‌بندی جملات تجزیه می‌کنیم:

$$x^3-x^2-x+1=(x^3-x^2)-(x-1)=x^2(x-1)-(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)$$
$$x^3+x^2-x-1=(x^3+x^2)-(x+1)=x^2(x+1)-(x+1)$$
$$=(x+1)(x^2-1)=(x-1)(x+1)^2$$

پس ک.م.م دو چندجمله‌ای برابر است با:

$$\text{ک.م.م}=(x-1)^2(x+1)^2=(x^2-1)^2$$

و مقدار ک.م.م به ازای $x=2$ می‌شود: $(2^2-1)^2=3^2=9$

۳- **گزینه۴** چون تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها سخت است، عامل‌های گزینه‌ها را پیدا می‌کنیم و بررسی می‌کنیم آیا هر دو چندجمله‌ای بر این عامل‌ها بخش‌پذیرند یا نه.

① $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow \begin{cases} 2x^3-3x^2+1=2-3+1=0 \ ✓\\ 3x^3-7x^2+5x-1=3-7+5-1=0 \ ✓\end{cases}\\ x=2 \Rightarrow 2x^3-3x^2+1=16-12+1\neq 0 \ ✗\end{cases}$$

پس هر دو چندجمله‌ای بر $x-1$ بخش‌پذیرند.

② $x^2+x-2=(x-1)(x+2)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \ ✓\\ x=-2 \Rightarrow 2x^3-3x^2+1=-16-12+1\neq 0 \ ✗\end{cases}$$

③ $x^2-1=(x-1)(x+1)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \ ✓\\ x=-1 \Rightarrow 2x^3-3x^2+1=-2-3+1\neq 0 \ ✗\end{cases}$$

پس جواب ④ است، یعنی هر دو بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیرند. *(ثابت کنید که هر دو، عامل $(x-1)^2$ دارند!)*

مقدار $x=1$ هر دو چندجمله‌ای را صفر می‌کند، پس هر دو را بر $x-1$ تقسیم می‌کنیم تا هر دو را تجزیه کنیم:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3}-3x^2+1 & x-1\\ \hline -\ \cancel{2x^3}-2x^2 & 2x^2-x-1\\ \quad\ \cancel{-x^2}+1 & \\ -\ \cancel{-x^2}+x & \\ \quad\ -x+1 & \\ -\ -x+1 & \\ \quad\ 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^2-x-1=2x^2-2x+x-1$$
$$=2x(x-1)+(x-1)=(x-1)(2x+1)$$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3-7x^2+5x-1 & x-1\\ \hline -\ 3x^3-3x^2 & 3x^2-4x+1\\ \quad\ -4x^2+5x-1 & \\ -\ -4x^2+4x & \\ \quad\ x-1 & \\ -\ x-1 & \\ \quad\ 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 3x^2-4x+1=3x^2-3x-x+1$$
$$=3x(x-1)-(x-1)=(x-1)(3x-1)$$

پس تجزیه‌ی دو عبارت و ب.م.م‌شان برابر است با:

$$\begin{cases} 2x^3-3x^2+1=(x-1)^2(2x+1)\\ 3x^3-7x^2+5x-1=(x-1)^2(3x-1)\end{cases} \Rightarrow \text{ب.م.م}=(x-1)^2$$

۴- **گزینه۳** هر دو چندجمله‌ای را تجزیه می‌کنیم:

$$2x^2-3x+1=2x^2-2x-x+1=2x(x-1)-(x-1)$$
$$=(x-1)(2x-1)$$
$$2x^2+x-1=2x^2+2x-x-1=2x(x+1)-(x+1)$$
$$=(x+1)(2x-1)$$

پس ک.م.م دو چندجمله‌ای برابر است با:

$$(x-1)(x+1)(2x-1)=(x^2-1)(2x-1)=2x^3-x^2-2x+1$$

۵- **گزینه۱** اول هر دو عبارت را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3-2ax^2-4x+8a=x^2(x-2a)-4(x-2a)=(x^2-4)(x-2a)$$
$$x^3-2x^2-b^2x+2b^2=x^2(x-2)-b^2(x-2)=(x-2)(x^2-b^2)$$

پس ک.م.م دو عبارت یعنی $P(x)$ برابر است با:

$$P(x)=(x^2-4)(x-2a)(x^2-b^2)$$

و سایر ریشه‌هایش برابر با b، $-b$، ۲ و -2 هستند.

۶- **گزینه۳** چون $f(x)$ در تقسیم بر x^2+x-2 و x^2-4x+3 دارای باقی‌مانده‌ی یکسان $2x-1$ است، پس $f(x)$ در تقسیم بر ک.م.م این دو عبارت هم همان باقی‌مانده را دارد. پس ک.م.م این دو چندجمله‌ای را پیدا می‌کنیم و $f(x)$ را با استفاده از رابطه‌ی تقسیم می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x^2+x-2=(x-1)(x+2)\\ x^2-4x+3=(x-1)(x-3)\end{cases} \Rightarrow \text{ک.م.م}=(x-1)(x+2)(x-3)$$

و چون $f(x)$ باید کم‌ترین ضریب و توان صحیح را داشته باشد، پس:

$$f(x)=\pm(x-1)(x+2)(x-3)+2x-1 \Rightarrow f(0)=\pm 6-1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} f(0)=-7\\ f(0)=5\end{cases}$$

۷- **گزینه۳** هر دو چندجمله‌ای را تجزیه می‌کنیم. برای تجزیه‌ی x^4+4 از اتحاد مربع کامل و مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2-2x)(x^2+2+2x)$$

برای تجزیه‌ی x^3-2x+4 اول سعی می‌کنیم یکی از ریشه‌ها را با استفاده از عددگذاری پیدا کنیم. $x=-2$ عبارت را صفر می‌کند، پس:

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x+4 & x+2 \\ \cline{2-2} -\ x^3+2x^2 & x^2-2x+2 \\ \cline{1-1} -2x^2-2x+4 & \\ -\ -2x^2-4x & \\ \cline{1-1} 2x+4 & \\ -\ 2x+4 & \\ \cline{1-1} 0\quad 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3-2x+4=(x^2-2x+2)(x+2)$$

پس ب.م.م دو عبارت برابر $P(x)=x^2-2x+2$ است و در نتیجه:

$$P(-2)=4+4+2=10$$

۸- **گزینه۳** با ادامه‌دادن جملات دو دنباله:

$$2,7,12,17,\dots \quad \text{و} \quad 1,5,9,13,17,\dots$$

می‌بینیم که اولین جمله‌ی مشترک برابر ۱۷ است. جملات مشترک دو دنباله، خود یک دنباله‌ی حسابی است با قدرنسبت ک.م.م قدرنسبت دو دنباله یعنی ک.م.م ۵ و ۴ که می‌شود ۲۰، پس جملات مشترک به شکل $17+20k$ هستند. بزرگ‌ترین عدد سه‌رقمی را که به شکل $17+20k$ است پیدا می‌کنیم:

$$17+20k\leq 999 \Rightarrow 20k\leq 982 \Rightarrow k\leq \frac{982}{20} \Rightarrow k\leq 49$$

پس بزرگ‌ترین عدد به ازای $k=49$ به دست می‌آید که می‌شود $17+20(49)=997$ و مجموع ارقامش برابر ۲۵ است.

۹- **گزینه۳** شیرهای A، B و C به ترتیب در هر ساعت $\frac{1}{6}$، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ استخر را پر می‌کنند، بنابراین چون می‌خواهیم استخر در کم‌ترین زمان ممکن پر شود باید شیر B و C را انتخاب کنیم. اگر استخر با این دو شیر در x ساعت پر شود باید $x(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=1$ باشد، یعنی $\frac{5}{6}x=1$ یا $x=\frac{6}{5}$ ساعت و $\frac{6}{5}$ ساعت یعنی $1\frac{1}{5}$ ساعت یا ۱ ساعت و ۱۲ دقیقه.

۱۰- **گزینه۴** گنجایش هر پاکت باید عددی باشد که هر سه عدد ۱۴۴، ۴۵ و ۶۳ بر آن بخش‌پذیر باشند و چون کم‌ترین تعداد پاکت‌ها را می‌خواهیم، پس باید ب.م.م سه عدد ۱۴۴، ۴۵ و ۶۳ را پیدا کنیم. هر سه عدد را تجزیه می‌کنیم:

$$144=2^4\times 3^2 \ ,\ 45=3^2\times 5 \ ,\ 63=3^2\times 7 \Rightarrow \text{ب.م.م}=3^2=9$$

پس برای بسته‌بندی کردن آب‌میوه‌ها باید حداقل $\frac{144}{9}+\frac{45}{9}+\frac{63}{9}=16+5+7=28$ پاکت داشته باشیم.

۱۱- **گزینه۲** طول اتاق $540=2^2\times 3^3\times 5$ سانتی‌متر و عرض اتاق $252=2^2\times 3^2\times 7$ سانتی‌متر است، پس حداقل تعداد سرامیک‌ها وقتی به دست می‌آید که ضلع سرامیک برابر ب.م.م این دو عدد یعنی $36=2^2\times 3^2$ سانتی‌متر باشد که اندازه‌ی مساحتش می‌شود $36\times 36=1296$ سانتی‌متر مربع.

۱۲- **گزینه۴** سه دونده وقتی هر سه با هم به همان نقطه می‌رسند که هر کدام با توجه به این‌که مسیر را در ۱۲، ۱۶ و ۱۸ دقیقه طی می‌کنند، زمانی برابر مضرب مشترک این سه عدد را بدوند. برای پیداکردن حداقل این زمان باید ک.م.م این سه عدد را پیدا کنیم:

$$12=2^2\times 3 \ ,\ 16=2^4 \ ,\ 18=2\times 3^2$$

$$\Rightarrow \text{ک.م.م}=2^4\times 3^2=144$$

پس بعد از ۱۴۴ دقیقه هر سه با هم به همان نقطه‌ی اول می‌رسند.

۱۳- **گزینه۱** اول دقت کنید که سه قطر افقی وقتی در یک امتداد قرار می‌گیرند که هر کدام از دایره‌ها نیم‌دور یا مضربی از نیم‌دور را طی کنند و ثانیاً چون سرعت چرخش دایره‌ها برابر ۱۰، ۱۸ و ۲۲ دور در دقیقه است، پس زمان طی‌شده برای یک دور هر کدام برابر $\frac{1}{10}$، $\frac{1}{18}$ و $\frac{1}{22}$ دقیقه و زمان طی‌شده برای طی نیم‌دور برابر $\frac{1}{20}$، $\frac{1}{36}$ و $\frac{1}{44}$ دقیقه است. حالا باید کوچک‌ترین عددی را پیدا کنیم که مضرب صحیح سه عدد $\frac{1}{20}$، $\frac{1}{36}$ و $\frac{1}{44}$ باشد:

$$20=2^2\times 5 \ ,\ 36=2^2\times 3^2 \ ,\ 44=2^2\times 11$$

$$\Rightarrow \text{ب.م.م}=2^2=4$$

پس کوچک‌ترین عددی که مضرب صحیح سه عدد $\frac{1}{20}$، $\frac{1}{36}$ و $\frac{1}{44}$ باشد، برابر $\frac{1}{4}$ دقیقه است یعنی ۱۵ ثانیه.

۱۴- **گزینه۳** شیر A، B و C هر کدام به ترتیب در هر ساعت $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{3}$ استخر را پر می‌کنند، پس اگر بخواهیم بعد از گذشت x ساعت کل استخر پر شود، باید $x(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3})=1$ شود یعنی $x(\frac{3+2+4}{12})=1$ یا $x=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$ ساعت و $\frac{4}{3}$ ساعت یعنی $1\frac{1}{3}$ ساعت یا ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه.

۱۵- **گزینه۲** اگر کارگر سریع‌تر آپارتمان را در x روز رنگ کند، کارگر کندتر آن را در $\frac{3}{2}x$ روز رنگ می‌کند. پس اولی و دومی به ترتیب در هر روز $\frac{1}{x}$ و $\frac{2}{3x}$ از آپارتمان را رنگ می‌کنند، بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}=\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{5}{3x}=\frac{1}{6} \Rightarrow x=10$$

یعنی کارگر سریع‌تر آپارتمان را در ۱۰ روز رنگ می‌کند.

۱۶- **گزینه۳** در ۵۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک ۴ درصدی $\frac{4}{100}\times 50=2$ کیلوگرم نمک داریم. پس اگر x کیلوگرم نمک به محلول اضافه کنیم تا به محلول ۸ درصدی برسیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{2+x}{50+x}=\frac{8}{100} \Rightarrow \frac{2+x}{50+x}=\frac{2}{25} \Rightarrow 50+25x=100+2x$$

$$\Rightarrow 23x=50 \Rightarrow x=\frac{50}{23}=2/17$$

۱۷- **گزینه۳** اگر x را برابر وزن آبی که باید تبخیر کنیم در نظر بگیریم، چون در ۸۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک ۵ درصدی $\frac{5}{100}\times 80=4$ کیلوگرم نمک وجود دارد، پس باید داشته باشیم:

$$\frac{4}{80-x}=\frac{8}{100} \Rightarrow 400=640-8x \Rightarrow 8x=240 \Rightarrow x=30$$

یعنی باید ۳۰ کیلوگرم از آب را تبخیر کنیم.

۱۸- گزینه۲ اگر قیمت هر پرس چلوکباب قبل از تخفیف x تومان باشد، می‌توانیم قبل از تخفیف $\frac{180000}{x}$ پرس و بعد از آن $\frac{180000}{x-3000}$ پرس چلوکباب بخریم؛ پس باید داشته باشیم:

$$\frac{180000}{x-3000}=\frac{180000}{x}+10 \Rightarrow 180000\left(\frac{1}{x-3000}-\frac{1}{x}\right)=10$$

$$\Rightarrow 18000\left(\frac{3000}{x(x-3000)}\right)=1 \Rightarrow x(x-3000)=18000\times 3000$$

$$\Rightarrow x(x-3000)=9000\times 6000 \Rightarrow x=9000$$

پس قیمت هر پرس چلوکباب قبل از تخفیف ۹۰۰۰ تومان بوده و می‌توانستیم $\frac{180000}{9000}=20$ پرس چلوکباب بخریم.

۱۹- گزینه۳ کلن $15=4+11$ کیلوگرم رنگ داریم که در آن $\frac{40}{100}\times 11+\frac{70}{100}\times 4=7/2$ کیلوگرم رنگ خالص داریم. اگر x کیلوگرم از رنگ را تبخیر کنیم، x کیلوگرم از وزن حلال کم می‌شود؛ پس برای آن‌که به غلظت ۵۰ درصد برسیم باید داشته باشیم:

$$\frac{7/2}{15-x}=\frac{50}{100} \Rightarrow \frac{7/2}{15-x}=\frac{1}{2} \Rightarrow 14/4=15-x \Rightarrow x=0/6$$

۲۰- گزینه۳ به جای x عددی قرار می‌دهیم که عبارت $a+\frac{b}{2}$ به طور مستقیم به دست آید:

$$\frac{x+2}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2} \xrightarrow{x=0} 1=-a-\frac{b}{2} \Rightarrow a+\frac{b}{2}=-1$$

بعد از مخرج‌مشترک گرفتن، طرفین را متحد قرار می‌دهیم:

$$\frac{x+2}{x^2-3x+2}=\frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow x+2\equiv(a+b)x-(2a+b)$$

پس باید $a+b=1$ و $2a+b=-2$ باشد و در نتیجه $a+\frac{b}{2}=-1$.

۲۱- گزینه۱ اول مخرج‌مشترک می‌گیریم و تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}=\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}$$

$$=\frac{a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}=\frac{3x^2-6x+2}{x(x-1)(x-2)}$$

$$\Rightarrow a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)=3x^2-6x+2$$

حالا می‌توانیم طرفین را متحد قرار دهیم ولی این کار وقت‌گیر است. برای حل سریع‌تر بهتر است به جای x اعدادی را که عامل‌های $x-1$، x و $x-2$ را صفر می‌کنند در تساوی جایگزین کنیم و a، b و c را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1 \\ x=1 \Rightarrow -b=-1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a+b+c=3 \\ x=2 \Rightarrow 2c=2 \Rightarrow c=1 \end{cases}$$

البته اگر دقت کنید می‌بینید که $a+b+c$ ضریب x^2 است و بنابراین $a+b+c=3$ و لازم نبود a، b و c را پیدا کنید.

۲۲- گزینه۳ وقتی $abc=2$، پس $ac=\frac{2}{b}$ و در نتیجه:

$$\frac{b+6}{3ac+1}=\frac{b+6}{\frac{6}{b}+1}=\frac{b+6}{\frac{6+b}{b}}=b$$

۲۳- گزینه۲ دامنه‌ی معادله $\mathbb{R}-\{2,-2\}$ است. پس با شرط $x\neq 2$ و $x\neq -2$ طرفین را در $(x-2)(x+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{x-2}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{8}{x^2-4} \Rightarrow (x-2)^2+x(x+2)=8$$

$$\Rightarrow 2x^2-2x+4=8 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

جواب $x=2$ غیرقابل‌قبول است، زیرا در دامنه‌ی تابع نیست پس معادله فقط یک ریشه دارد.

۲۴- گزینه۴ اول می‌رویم سراغ دامنه‌ی هر کدام از رادیکال‌ها:

$$\sqrt{x+\underbrace{\sqrt{x-2}}_{x\ge 2}}=\underbrace{\sqrt{2-x}}_{x\le 2}+\underbrace{\sqrt{2x-2}}_{x\ge 1} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D=\{2\}$$

پس اگر معادله ریشه‌ای داشته باشد، باید $x=2$ باشد. مقدار $x=2$ را امتحان می‌کنیم:

$$\sqrt{2+\sqrt{0}}=\sqrt{0}+\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}=\sqrt{2} \quad ✓$$

پس معادله فقط یک ریشه‌ی $x=2$ دارد.

۲۵- گزینه۱ اول می‌رویم سراغ دامنه‌ی معادله:

$$\underbrace{3x-2}_{x\ge\frac{2}{3}}=5\underbrace{\sqrt{1-9x^2}}_{-\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{3}} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing$$

چون دامنه‌ی معادله تهی است، معادله ریشه ندارد.

۲۶- گزینه۱ دامنه‌ی عامل $\sqrt{x-3}$ برابر است با $x\ge 3$ و به ازای $x\ge 3$ هر دو عامل $\sqrt[5]{x-1}$ و $\sqrt[3]{x-2}$ مثبت‌اند، پس معادله‌ی $\sqrt[5]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-3}=0$ نمی‌توانند ریشه داشته باشد، چون مجموع دو عامل مثبت و یک عامل بزرگ‌تر یا مساوی صفر هرگز برابر صفر نمی‌شود.

۲۷- گزینه۲ اگر معادله‌ی داده‌شده را به شکل $(x^2-2)^2\sqrt{x^2+x}+\sqrt[3]{(x^2-x)^2}=0$ بنویسیم، می‌بینیم که مجموع دو عامل بزرگ‌تر یا مساوی صفر برابر صفر شده است، پس هر دو باید برابر صفر باشند. اعدادی که عامل $\sqrt[3]{(x^2-x)^2}$ را صفر می‌کنند $x=1$ و $x=0$ هستند و چون عامل $(x^2-2)^2\sqrt{x^2+x}$ فقط به ازای $x=0$ صفر می‌شود، پس معادله فقط یک ریشه دارد.

۲۸- گزینه۲ اول می‌رویم سراغ دامنه:

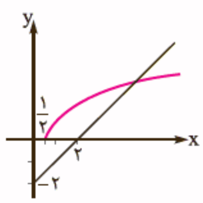
$$\sqrt{2x-1}-x+2=0 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{2x-1}}_{x\ge\frac{1}{2}}=\underbrace{x-2}_{x\ge 2} \xrightarrow{\text{اشتراک}} [2,+\infty)$$

حالا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x-1=x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

ریشه‌ی $x=1$ قابل‌قبول نیست، پس معادله فقط یک ریشه‌ی $x=5$ دارد.

پس از نوشتن معادله به شکل $\sqrt{2x-1}=x-2$، نمودار دو تابع $y=\sqrt{2x-1}$ و $y=x-2$ را رسم می‌کنیم تا ببینیم یکدیگر را در چند نقطه قطع می‌کنند:



دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند پس معادله یک ریشه دارد.

گزینه۱ -۲۹ در معادله‌ی $x^4+x^2+\sqrt{x^2-1}=2$ دامنه‌ی معادله x هایی است که در نامساوی $x^2\ge 1$ صدق می‌کنند. حالا داریم:

$$\underbrace{x^4}_{\text{بزرگ‌تر یا مساوی ۱}}+\underbrace{x^2}_{\text{بزرگ‌تر یا مساوی ۱}}+\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\text{بزرگ یا مساوی صفر}}=2$$

تساوی بالا فقط وقتی برقرار می‌شود که $x^2=1$ باشد یعنی $x=1$ و $x=-1$، پس معادله فقط دو ریشه دارد.

گزینه۲ -۳۰ در معادله‌ی $\sqrt[4]{x^3+x-10}+\sqrt{x^2-3x+2}=0$ هر دو رادیکال حاصل بزرگ‌تر یا مساوی صفر دارند، پس مجموعشان وقتی صفر می‌شود که هر دو برابر صفر باشند. اعدادی که x^2-3x+2 را صفر می‌کنند $x=1$ و $x=2$ هستند که از این دوتا فقط $x=2$ عبارت x^3+x-10 را صفر می‌کند، پس معادله فقط یک ریشه‌ی $x=2$ دارد.

گزینه۳ -۳۱ دامنه‌ی معادله $x\ge -6$ است. حالا هر کدام از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x^2+10x+21=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 & \text{ق‌ق} \\ x=-7 & \text{غ‌ق}\end{cases}$$

$$\sqrt{x+6}=x \Rightarrow \text{دامنه}=[0,+\infty)$$

$$x+6=x^2 \Rightarrow x^2-x-6=0 \Rightarrow \begin{cases}x=3 & \text{ق‌ق}\\ x=-2 & \text{غ‌ق}\end{cases}$$

پس معادله دارای دو جواب $x=3$ و $x=-3$ است.

گزینه۲ -۳۲ اول از یک عامل x فاکتور می‌گیریم:

$$x\sqrt{x-1}-x^2+3x=0 \Rightarrow x\sqrt{x-1}=x(x-3)$$

حالا دامنه‌ی معادله را پیدا می‌کنیم: (حواستان باشد که قبل از هر کاری بروید سراغ دامنه)

$$\begin{cases}x-1\ge0\Rightarrow x\ge1\\ x(x-3)\ge0 \Rightarrow x\le 0 \ \text{یا}\ x\ge3\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D=[3,+\infty)$$

حالا جواب‌های معادله را پیدا می‌کنیم:

$$x\sqrt{x-1}=x(x-3)\Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ‌ق}\\ \sqrt{x-1}=x-3 \Rightarrow x-1=x^2-6x+9 \\ \Rightarrow x^2-7x+10=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=2 & \text{غ‌ق} \\ x=5 & \text{ق‌ق}\end{cases}$$

پس معادله فقط یک ریشه‌ی $x=5$ دارد.

گزینه۱ -۳۳ اول دامنه‌ی معادله را پیدا می‌کنیم:

$$2x=5\sqrt{x-2} \Rightarrow 5\sqrt{x}=2x+2$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x\ge0\\x\ge-1\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} D=[0,+\infty)$$

حالا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$25x=4x^2+8x+4 \Rightarrow 21x^2-8x-4=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+84}}{21}=\frac{4\pm10}{21}\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}\\ x=\frac{-6}{21}=-\frac{2}{7}\end{cases}$$

تنها مقدار $x=\frac{2}{3}$ قابل قبول است، پس مجموع ریشه‌ها نیز برابر $\frac{2}{3}$ است.

گزینه۳ -۳۴ دامنه‌ی معادله $x\ge0$ است. برای حل معادله اول طرفین آن را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=1-x \Rightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$$

با ساده‌کردن عامل $1-\sqrt{x}$ از طرفین معادله یک جواب $x=1$ دارد و در ادامه داریم:

$$\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1+\sqrt{x} \Rightarrow (1+\sqrt{x})^2=1 \Rightarrow 1+\sqrt{x}=1\Rightarrow x=0$$

پس معادله دو ریشه دارد.

گزینه۲ -۳۵ دامنه‌ی معادله $x\ge1$ است. یکی از رادیکال‌ها را به طرف دیگر می‌بریم و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+1}=2-\sqrt{x-1}\xrightarrow{\text{توان ۲}} x+1=4+x-1-4\sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x-1}=2\Rightarrow \sqrt{x-1}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

گزینه۳ -۳۶ دامنه‌ی معادله $x\ge0$ است. یکی از رادیکال‌ها را به طرف دیگر می‌بریم و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+2}=3-3\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+2=9+9x-18\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 18\sqrt{x}=8x+7$$

با توجه به این‌که $18\sqrt{x}=8x+7$ است، پس باید $8x+7\ge0$ باشد یعنی دامنه‌ی معادله می‌شود اشتراک $x\ge-\frac{7}{8}$ و $x\ge0$ یعنی $x\ge0$، باز هم طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$324x=64x^2+112x+49\Rightarrow 64x^2-212x+49=0$$

حل این معادله دشوار است اما اگر معادله را به صورت تابع $f(x)=64x^2-212x+49$ در نظر بگیریم از آن‌که جمع ریشه‌ها یعنی $\frac{212}{64}>0$ و ضرب ریشه‌ها یعنی $\frac{49}{64}>0$ است، پس این معادله دو ریشه‌ی مثبت دارد، بنابراین معادله‌ی اصلی هم دو ریشه دارد.

گزینه۲ -۳۷ اول دامنه‌ی معادله را پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{3x+5}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{9x+7}$$

$$x\ge\frac{-5}{3},\quad x\ge\frac{-1}{3},\quad x\ge\frac{-7}{9}\xrightarrow{\text{اشتراک}} x\ge\frac{-1}{3}$$

حالا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$3x+5+3x+1-2\sqrt{(3x+5)(3x+1)}=9x+7$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(3x+5)(3x+1)}=-3x-1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{(3x+5)(3x+1)}=-(3x+1)$$

برای آن‌که بتوانیم طرفین را به توان ۲ برسانیم باید $-(3x+1)\ge0$ و در نتیجه $x\le-\frac{1}{3}$ باشد که با توجه به دامنه‌ی اولیه‌ی معادله $(x\ge-\frac{1}{3})$، x فقط می‌تواند برابر $-\frac{1}{3}$ باشد. مقدار $x=-\frac{1}{3}$ را امتحان می‌کنیم:

$$x=-\frac{1}{3}\Rightarrow \sqrt{4}-\sqrt{0}=\sqrt{4} \ ☑$$

پس معادله فقط یک جواب $x=-\frac{1}{3}$ دارد.

گزینه۳ -۳۸ ابتدا سعی می‌کنیم هر کدام از رادیکال‌ها را با تبدیل عبارت زیر رادیکال به مربع کامل ساده کنیم: (دامنه‌ی معادله $x\ge1$ است.)

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=\sqrt{(x+1)+2\sqrt{x+1}+1}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2}=|\sqrt{x+1}+1|=\sqrt{x+1}+1$$

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=|\sqrt{x-1}-1|$$

پس معادله به شکل $\sqrt{x+1}+1+|\sqrt{x-1}-1|=3$ تبدیل می‌شود. حالا دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف $\sqrt{x-1}-1\ge 0 \Rightarrow x\ge 2$

$$\sqrt{x+1}+1+\sqrt{x-1}-1=3 \Rightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=3$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x+1+x-1+2\sqrt{x^2-1}=9 \Rightarrow 2\sqrt{x^2-1}=9-2x$$

عبارت $9-2x$ باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، پس $x\le\frac{9}{2}$ یعنی دامنه‌ی معادله تبدیل می‌شود به $1\le x\le\frac{9}{2}$، حالا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4x^2-4=81-36x+4x^2 \Rightarrow 36x=85 \Rightarrow x=\frac{85}{36}$$

چون $1\le\frac{85}{36}\le\frac{9}{2}$ و $\frac{85}{36}>2$ پس قابل قبول است.

ب $\sqrt{x-1}-1<0 \Rightarrow 1\le x<2$

$$\sqrt{x+1}+1+1-\sqrt{x-1}=3 \Rightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=1$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x+1+x-1-2\sqrt{x^2-1}=1 \Rightarrow 2\sqrt{x^2-1}=2x-1$$

با توجه به دامنه، عبارت $2x-1>0$ است، پس طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$4x^2-4=4x^2-4x+1 \Rightarrow 4x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

و چون $1\le\frac{5}{4}<2$، پس این ریشه نیز قابل‌قبول است. پس معادله دو ریشه دارد.

۳۹- گزینه۲ دامنه‌ی معادله برابر مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $x^2+4x+3\ge 0$ یعنی $x\ge -1$ یا $x\le -3$ است. اگر طرفین را به توان ۲ برسانیم، به یک معادله‌ی درجه ۴ می‌رسیم که حلش دشوار است. پس فرض می‌کنیم $x^2+4x+3=t$ و معادله را برحسب t می‌نویسیم و حل می‌کنیم:

$$x^2+4x+3=\sqrt{x^2+4x+5} \Rightarrow t=\sqrt{t+2}$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} t^2=t+2 \Rightarrow t^2-t-2=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t=-1 \Rightarrow x^2+4x+3=-1 \Rightarrow x=-2 \quad \text{غ‌ق‌ق} \\ t=2 \Rightarrow x^2+4x+3=2 \Rightarrow x^2+4x+1=0 \end{cases}$$

برای پیداکردن حاصل‌ضرب ریشه‌ها لازم نیست معادله را حل کنیم چون می‌دانیم حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌دوم برابر $\frac{c}{a}=1$ است.

(؟ *چرا مطمئنیم که ریشه‌های به دست آمده متعلق به دامنه‌ی معادله هستند و قابل قبول‌اند؟*)

۴۰- گزینه۲ دامنه‌ی معادله‌ی $\sqrt{x-2}+\sqrt{x}=k$ بازه‌ی $[2,+\infty)$ است و عبارت $\sqrt{x-2}+\sqrt{x}$ به ازای $x\ge 2$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی $\sqrt{2}$ است. پس برای آن‌که معادله دارای ریشه باشد باید $k\ge\sqrt{2}$ باشد. بنابراین شرط $k>0$ برای وجود ریشه‌ی معادله لازم است ولی کافی نیست.

۴۱- گزینه۲ اول دامنه‌ی معادله را پیدا می‌کنیم. برای این کار عامل $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ را به شکل $\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}$ یا $\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}$ می‌نویسیم:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}=k$$
$$\Rightarrow \sqrt{x-1}+|\sqrt{x-1}-1|=k \Rightarrow |\sqrt{x-1}-1|=-\sqrt{x-1}+k$$

حالا اگر فرض کنیم $k=1$، تساوی بالا به ازای تمام xهایی که $\sqrt{x-1}-1$ علامت منفی داشته باشد برقرار است. پس با شرط $1\le x\le 2$ و $k=1$ معادله دارای بی‌شمار ریشه است.

۴۲- گزینه۲ دامنه‌ی معادله‌ی $\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x-2}=k$ مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $x^2-4x\ge 0$ یعنی $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$ است، پس اگر معادله بخواهد ریشه‌ی مثبت داشته باشد باید $x\ge 4$ باشد. به ازای $x\ge 4$ عامل $x-2$ مثبت است، پس می‌توانیم کسر را به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x-2}=\sqrt{\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}}=\sqrt{\frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{(x-2)^2}}$$

عامل $1-\frac{4}{(x-2)^2}$ همواره کوچک‌تر از ۱ است، پس برای آن‌که معادله‌ی $\sqrt{1-\frac{4}{(x-2)^2}}=k$ دارای ریشه‌ی مثبت باشد باید $0<k<1$ باشد.

۴۳- گزینه۴ اگر قیمت کالا را x فرض کنیم، قیمت خرید کل کالا Ax و قیمت فروش آن $(\frac{A}{4})2x+(\frac{A}{4})(\frac{x}{2})+(\frac{A}{2})x$ یعنی $\frac{9}{8}Ax$ است پس سود فروشنده برابر $\frac{1}{8}Ax$ یا ۱۲/۵ درصد قیمت خرید است.

۴۴- گزینه۳ معادله را به شکل اتحاد $(a+b)^3$ تبدیل می‌کنیم:

$$x^3+3x^2+3x-1=0 \Rightarrow x^3+3x^2+3x+1-2=0$$
$$\Rightarrow (x+1)^3-2=0 \Rightarrow (x+1)^3=2 \Rightarrow x+1=\sqrt[3]{2}$$
$$\Rightarrow x=-1+\sqrt[3]{2}$$

۴۵- گزینه۳ معادله باید دارای عامل‌های $x-1$، $x-\sqrt{3}$ و $x+\sqrt{3}$ باشد، پس:

$$(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$$
$$\Rightarrow (x-1)(x^2-3)=0 \Rightarrow x^3-x^2-3x+3=0$$

۴۶- گزینه۱ می‌دانیم اگر $a+b+c=0$ باشد، آن‌گاه $a^3+b^3+c^3=3abc$ و چون مجموع سه عامل $(x-7)$، $(-4x+5)$ و $(3x+2)$ برابر صفر است، پس:

$$(3x+2)^3+(-4x+5)^3+(x-7)^3=0$$
$$\Rightarrow 3(3x+2)(-4x+5)(x-7)=0 \Rightarrow x=\frac{-2}{3}\ ,\ x=\frac{5}{4}\ ,x=7$$

یعنی معادله سه ریشه دارد.

۴۷- گزینه۱ گفتیم اگر معادله‌ی $4x^4+x^2-3x+1=0$ بخواهد ریشه‌ی گویا داشته باشد، ریشه‌ی مزبور باید عددی به شکل $\pm\frac{a}{b}$ باشد که در آن a از شمارنده‌های ۱ و b از شمارنده‌های ۴ است، پس ریشه‌های گویای این معادله می‌توانند اعداد ±1 و $\pm\frac{1}{2}$ باشند. این عددها را در معادله امتحان می‌کنیم:

$$x=1 \Rightarrow 4+1-3+1\ne 0$$
$$x=-1 \Rightarrow 4+1+3+1\ne 0$$
$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+1=0$$
$$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+1\ne 0$$

پس $x=\frac{1}{2}$ یکی از ریشه‌های معادله است، معادله را بر $2x-1$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+x^2-3x+1 & 2x-1 \\ \cline{2-2} -(4x^4-2x^3) & 2x^3+x^2+x-1 \\ \quad 2x^3+x^2-3x+1 & \\ \quad -(2x^3-x^2) & \\ \qquad 2x^2-3x+1 & \\ \qquad -(2x^2-x) & \\ \qquad\quad -2x+1 & \\ \qquad\quad -(-2x+1) & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

حالا باید تعداد ریشه‌های خارج‌قسمت را پیدا کنیم. عدد $x=\frac{1}{2}$ را در معادله‌ی به دست آمده یعنی $2x^3+x^2+x-1=0$ امتحان می‌کنیم:

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-1=0$$

پس $x=\frac{1}{2}$ ریشه‌ی خارج قسمت هم است.

حالا معادله‌ی جدید را هم بر $2x-1$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+x^2+x-1 & 2x-1 \\ \cline{2-2} -(2x^3-x^2) & x^2+x+1 \\ \quad 2x^2+x-1 & \\ \quad -(2x^2-x) & \\ \qquad 2x-1 & \\ \qquad -(2x-1) & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

معادله‌ی $x^2+x+1=0$ ریشه ندارد. پس معادله‌ی اصلی دارای دو ریشه‌ی $x=\frac{1}{2}$ و $x=\frac{1}{2}$ یعنی یک ریشه‌ی مضاعف مثبت است.

۴۸- **گزینه۴** b ریشه‌ی معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$x^3-bx^2+bx-3bc=0 \xrightarrow{x=b} b^3-b^3+b^2-3bc=0$$

$$\Rightarrow b(b-3c)=0 \Rightarrow c=\frac{b}{3}$$

c نیز ریشه‌ی معادله است، پس در معادله صدق می‌کند. به جای x مقدار $c=\frac{b}{3}$ را قرار می‌دهیم:

$$x^3-bx^2+bx-3bc=0 \Rightarrow \frac{b^3}{27}-\frac{b^3}{9}+\frac{b^2}{3}-b^2=0$$

$$\Rightarrow b^2\left(\frac{-2b}{27}-\frac{2}{3}\right)=0 \Rightarrow b=-9$$

۴۹- **گزینه۴** اگر ریشه‌ی مشترک دو معادله را a فرض کنیم، a باید در هر دو معادله صدق کند. پس $x=a$ را در معادله‌ها قرار می‌دهیم و دستگاه به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a^4+a^2-1=0 \\ a^3+7a+1=0 \end{cases} \xrightarrow{\times a} \begin{cases} a^4+a^2-1=0 \\ a^4+7a^2+a=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} -6a^2-1-a=0 \Rightarrow 6a^2+a+1=0 \Rightarrow$$ ریشه ندارد

پس دو معادله ریشه‌ی مشترک ندارند.

۵۰- **گزینه۳** چون نمودار تابع $f(x)=2x^3-5x^2-x+m$ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند، پس $x=2$ در معادله‌ی $f(x)=0$ صدق می‌کند؛ یعنی $16-20-2+m=0$ و در نتیجه $m=6$.

حالا معادله را بر $x-2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-5x^2-x+6 & x-2 \\ \cline{2-2} -(2x^3-4x^2) & 2x^2-x-3 \\ \quad -x^2-x+6 & \\ \quad -(-x^2+2x) & \\ \qquad -3x+6 & \\ \qquad -(-3x+6) & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

ریشه‌های دیگر معادله از حل معادله‌ی $2x^2-x-3=0$ به دست می‌آیند که عبارت‌اند از $x=-1$ و $x=\frac{3}{2}$.

۵۱- **گزینه۲** چون $x=2$ یکی از ریشه‌های معادله است، پس در معادله صدق می‌کند: $x(ax^2-x-5)=2$

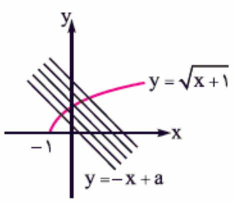
$$\xrightarrow{x=2} 2(4a-2-5)=2 \Rightarrow 4a-7=1 \Rightarrow a=2$$

حالا معادله را به ازای $a=2$ مرتب می‌کنیم و سپس بر $x-2$ تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت تقسیم یعنی معادله‌ای که ریشه‌هایش دو ریشه‌ی دیگر معادله است را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3-x^2-5x-2 & x-2 \\ \cline{2-2} -(2x^3-4x^2) & 2x^2+3x+1 \\ \quad 3x^2-5x-2 & \\ \quad -(3x^2-6x) & \\ \qquad x-2 & \\ \qquad -(x-2) & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

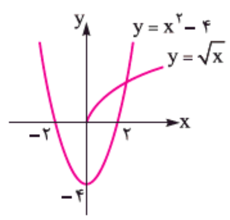
مجموع دو ریشه‌ی دیگر معادله برابر مجموع ریشه‌های معادله‌ی $2x^2+3x+1=0$ یعنی $-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}$ است.

۵۲- **گزینه۲** معادله را به شکل $\sqrt{x+1}=-x+a$ می‌نویسیم و نمودار دو تابع $y=\sqrt{x+1}$ و $y=-x+a$ را با شرط $a>0$ رسم می‌کنیم:



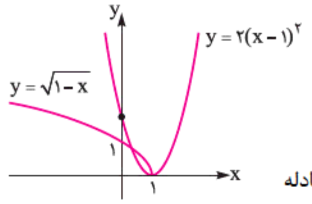
خط $y=-x+a$ خطی است موازی خط $y=-x$ که محور yها در نقطه‌ی $(0,a)$ که $a>0$ قطع می‌کند. پس معادله همیشه یک ریشه دارد.

۵۳- **گزینه۳** برای پیداکردن تعداد ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4=\sqrt{x}$ نمودار دو تابع $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2-4$ را رسم می‌کنیم:



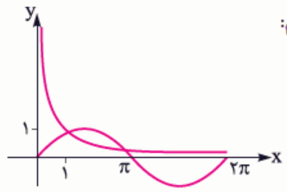
دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، پس معادله یک ریشه دارد.

۵۴- گزینه۳ معادله را به صورت $\sqrt{1-x}=2x^2-4x+2$ یا $\sqrt{1-x}=2(x-1)^2$ می‌نویسیم و نمودار تابع‌های $y=\sqrt{1-x}$ و $y=2(x-1)^2$ را رسم می‌کنیم:



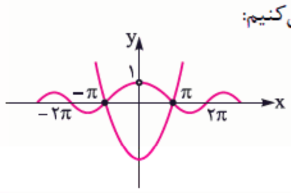
همان‌طور که در شکل می‌بینیم معادله دو ریشه دارد.

۵۵- گزینه۳ برای تعیین تعداد ریشه‌های معادله‌ی $x\sin x-1=0$ آن را به شکل $\sin x=\frac{1}{x}$ می‌نویسیم و نمودار دو تابع $y=\sin x$ و $y=\frac{1}{x}$ را رسم می‌کنیم:



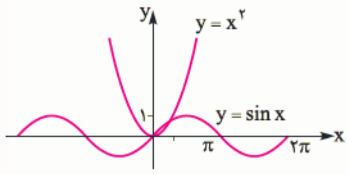
دو نمودار یکدیگر را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ در دو نقطه قطع می‌کنند، پس معادله دو ریشه دارد.

۵۶- گزینه۲ نمودار دو تابع $y=\frac{\sin x}{x}$ و $y=x^2-\pi^2$ را رسم و تعداد نقاط برخوردشان را پیدا می‌کنیم:



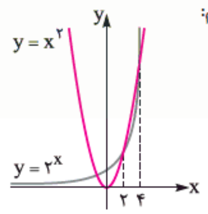
همان‌طور که در شکل می‌بینید دو نمودار یکدیگر را در دو نقطه به طول‌های π و $-\pi$ قطع می‌کنند، پس معادله دارای دو ریشه است.

۵۷- گزینه۳ نمودار دو تابع $y=x^2$ و $y=\sin x$ را رسم می‌کنیم.



دو نمودار یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند، پس معادله دو ریشه دارد.

۵۸- گزینه۳ نمودار دو تابع $y=2^x$ و $y=x^2$ را رسم و تعداد نقاط برخورد دو نمودار را تعیین می‌کنیم:



دو نمودار در یک نقطه با طول منفی و در دو نقطه با طول‌های مثبت (یعنی $x=2$ و $x=4$) متقاطع‌اند، پس معادله سه جواب دارد.

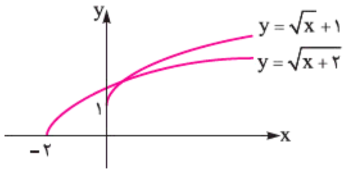
۵۹- گزینه۲ دامنه‌ی معادله $x\ge 0$ است. طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=1 \Rightarrow x+2+x-2\sqrt{x}\sqrt{x+2}=1$$

$$\Rightarrow 2x+1=2\sqrt{x^2+2x}$$

با توجه به این‌که $x\ge 0$ است، عبارت $2x+1$ همواره مثبت است. دوباره طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم: $4x^2+1+4x=4x^2+8x \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

معادله را به شکل $\sqrt{x+2}=\sqrt{x}+1$ می‌نویسیم و نمودار دو تابع $y=\sqrt{x+2}$ و $y=\sqrt{x}+1$ را رسم می‌کنیم:



دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، پس معادله یک ریشه دارد.

۶۰- گزینه۲ دامنه‌ی معادله $x\ge -1$ است. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x(x+1)-\sqrt{x+1}=10 \Rightarrow ((x+1)-1)(x+1)-\sqrt{x+1}=10$$

حالا اگر $\sqrt{x+1}$ را برابر t فرض کنیم، معادله به شکل زیر در می‌آید:

$$(t^2-1)t^2-t=10 \Rightarrow t^4-t^2-t-10=0$$

سعی می‌کنیم با دسته‌بندی، جملات را طوری مرتب کنیم که عبارت را تجزیه کنیم:

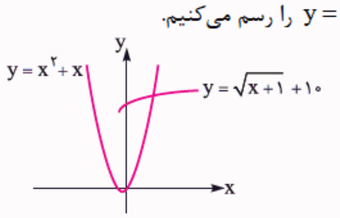
$$(t^4-16)-(t^2+t-6)=0 \Rightarrow (t^2-4)(t^2+4)-(t-2)(t+3)=0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t+2)(t^2+4)-(t-2)(t+3)=0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t^3+2t^2+4t+8-t-3)=0$$

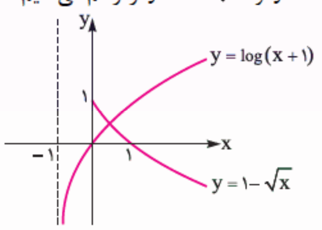
پس یکی از جواب‌ها $t=2$ یا $\sqrt{x+1}=2$ است که جواب x می‌شود $x=3$، در ادامه داریم $t^3+2t^2+3t+5=0$ که با توجه به این‌که همواره $t\ge 0$ است، جواب ندارد. پس معادله فقط یک ریشه دارد.

معادله را به شکل $x^2+x=\sqrt{x+1}+10$ می‌نویسیم و نمودار دو تابع $y=x^2+x$ و $y=\sqrt{x+1}+10$ را رسم می‌کنیم.



همان‌طور که می‌بینید دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، پس معادله فقط یک جواب دارد.

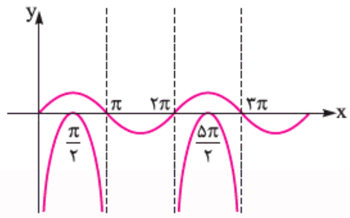
۶۱- گزینه۲ معادله را به شکل $\log(x+1)=1-\sqrt{x}$ می‌نویسیم و نمودار دو تابع $y=\log(x+1)$ و $y=1-\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم.



دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، پس معادله یک ریشه دارد.

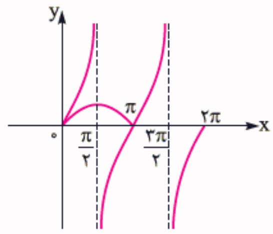
۶۲- گزینه۱ معادله را به صورت $\log(\sin x)=\sin x$ می‌نویسیم تابع $y=\log(\sin x)$ در بازه‌هایی که تعریف شده است همواره نامثبت است و در نقاط $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ مقداری برابر صفر دارد. از طرف دیگر تابع $y=\sin x$ در بازه‌های تعریف تابع $y=\log(\sin x)$، همواره مقداری نامنفی دارد و در نقاط $x=k\pi$ برابر صفر است. بنابراین دو تابع در بازه‌هایی که

هر دو تعریف می‌شوند نمی‌توانند نقطه‌ی مشترک داشته باشند. البته می‌توانستیم نمودار دو تابع $y=\sin x$ و $y=\log(\sin x)$ را نیز رسم کنیم. تابع $y=\log(\sin x)$ در بازه‌هایی تعریف شده است که $\sin x>0$ است یعنی $2k\pi<x<2k\pi+\pi$، مقدار این تابع همواره منفی است و وقتی به خطوط $x=k\pi$ نزدیک می‌شود y تابع به $-\infty$ میل می‌کند.



همان‌طور که در شکل می‌بینید با این‌که هر دو تابع متناوب‌اند و تا بی‌نهایت به همین شکل تکرار می‌شوند، در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کنند. پس معادله ریشه ندارد.

۶۳- گزینه ۴ معادله را به شکل $\sqrt{\sin x}=\tan x$ می‌نویسیم و سپس نمودار دو تابع $y=\sqrt{\sin x}$ و $y=\tan x$ را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ رسم می‌کنیم:



همان‌طور که می‌بینید دو نمودار در سه نقطه، یکی در $x=0$ و دیگری $x=\pi$ و همین‌طور $x=2\pi$ با هم متقاطع‌اند، پس معادله سه ریشه دارد.

۶۴- گزینه ۲ عبارت $\frac{(1-x)(2+x)(x^2+1)}{(3-x)(x+1)}$ را تعیین علامت می‌کنیم. جواب‌های صورت کسر برابر $x=1$ و $x=-2$ و جواب‌های مخرج کسر $x=-1$ و $x=3$ است، پس:

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
		+	|	−	⊘	+	|	−	⊘	+	

پس عبارت در بازه‌های $(-\infty,-2)$، $(-1,1)$ و $(3,+\infty)$ مثبت است.

۶۵- گزینه ۳ می‌دانیم برای آن‌که عبارت ax^2+bx+c همواره مثبت (بالای محور xها) باشد، باید $\Delta<0$ و $a>0$ باشد، پس در عبارت $(a-1)x^2+2\sqrt{2}x+a$ باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\Delta<0 \Rightarrow 8-4a(a-1)<0 \Rightarrow a^2-a-2>0 \Rightarrow a<-1 \text{ یا } a>2\\ \text{ضریب } x^2>0 \Rightarrow a-1>0 \Rightarrow a>1\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} a>2$$

۶۶- گزینه ۳ تمام عوامل را می‌آوریم یک طرف و مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^2+x+3}{2x^2-x}-1>0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+x+3-2x^2+x}{2x^2-x}>0 \Rightarrow \frac{-x^2+2x+3}{2x^2-x}>0$$

حالا کسر را تعیین علامت می‌کنیم:

$$-x^2+2x+3=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\x=3\end{cases} \qquad 2x^2-x=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
		−	|	+	⊘	−	⊘	+	|	−	

پس مجموعه‌جواب معادله برابر $(-1,0)\cup(\frac{1}{2},3)$ و شامل دو عدد صحیح یعنی ۱ و ۲ است.

۶۷- گزینه ۲ برای آن‌که عبارت درجه دوم همواره مثبت باشد، باید $\Delta<0$ و $a>0$ باشد، پس در عبارت $(m-1)x^2+6x+2m+1$ داریم:

$$\Delta<0 \Rightarrow 36-4(m-1)(2m+1)<0$$

$$\Rightarrow 4(9-2m^2-m+2m+1)<0 \Rightarrow -2m^2+m+10<0$$

$$\Rightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{-4} \Rightarrow \begin{cases}m=\frac{5}{2}\\m=-2\end{cases} \Rightarrow m<-2 \text{ یا } m>\frac{5}{2}$$

$$a>0 \Rightarrow m-1>0 \Rightarrow m>1$$

و اشتراک جواب دو نامعادله می‌شود $m>\frac{5}{2}$ یا $m>$ ۲/۵.

۶۸- گزینه ۳ داشتیم که عبارت درجه دوم ax^2+bx+c وقتی همواره منفی است که $\Delta<0$ و $a<0$ باشد، پس:

$$\Delta<0 \Rightarrow (a-1)^2-4(a-1)<0 \Rightarrow (a-1)(a-5)<0$$

$$\Rightarrow 1<a<5$$

$$\text{ضریب } x^2<0 \Rightarrow (a-1)<0 \Rightarrow a<1$$

و چون دو بازه‌ی به دست آمده اشتراک ندارند پس $a\in\varnothing$.

اگر عبارت بخواهد همواره منفی باشد باید $a-1<0$ باشد و در این صورت چون $c>0$ است پس معادله همواره دو ریشه دارد و نمی‌توانند فقط یک علامت داشته باشد پس $a\in\varnothing$.

۶۹- گزینه ۲ برای آن‌که نمودار زیر محور xها باشد باید $f(x)<0$ باشد، پس باید نامعادله‌ی $x^3-4x^2-x+4<0$ را با شرط $x>-1$ حل کنیم:

$$x^3-4x^2-x+4<0$$

$$\Rightarrow x^2(x-4)-(x-4)<0 \Rightarrow (x-4)(x^2-1)<0$$

حالا عبارت $(x-4)(x^2-1)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
		−	|	+	|	−	|	+	

جواب نامعادله می‌شود $x<-1$ یا $1<x<4$ که با اشتراک با $x>-1$ جواب آخر می‌شود $1<x<4$، بنابراین بیشترین مقدار $b-a$ برابر $4-1=3$ است.

۷۰- گزینه ۲ بازه‌ای که در آن نمودار تابع پایین‌تر از خط به معادله‌ی $y=2$ است، برابر مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $\frac{3x^2-2x}{x^2+4}<2$ است.

چون x^2+4 مثبت است طرفین را در x^2+4 ضرب می‌کنیم:

$$3x^2-2x<2x^2+8 \Rightarrow x^2-2x-8<0$$

$\Rightarrow$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
		+	|	−	|	+	

پس بازه‌ی (a,b) برابر بازه‌ی $(-2,4)$ است و بیشترین مقدار $b-a$ برابر ۶ است.

۷۱- گزینه۴ می‌دانیم اگر عبارت درجه دوم ax^2+bx+c بخواهد همواره مثبت باشد باید $\Delta<0$ و $a>0$ باشد، پس در عبارت $(m+2)x^2-2mx+1$ باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\Delta<0 \Rightarrow 4m^2-4(m+2)<0 \Rightarrow m^2-m-2<0 \Rightarrow -1<m<2\\ a>0 \Rightarrow m+2>0 \Rightarrow m>-2\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} -1<m<2$$

۷۲- گزینه۳ همه‌ی عوامل را می‌آوریم یک طرف و بعد از مخرج‌مشترک گرفتن عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\frac{x^2-x}{x^2+x-2}-\frac{x}{2}<0 \Rightarrow \frac{2x^2-2x-x^3-x^2+2x}{2(x^2+x-2)}<0$$

$$\Rightarrow \frac{-x^3+x^2}{2(x^2+x-2)}<0$$

$$-x^3+x^2=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0 \ (2)\\ x=1 \ (1)\end{cases},\quad x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases}x=1 \ (1)\\ x=-2 \ (1)\end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0^*		1^*		$+\infty$
		+	ϕ	−	|	−	ϕ	−	

دقت کنید که ریشه‌های $x=0$ و $x=1$ از مرتبه‌ی زوج هستند. مجموعه‌جواب نامعادله برابر $(-2,+\infty)-\{0,1\}$ است، پس $A=\{0,1\}$ دو عضو دارد.

۷۳- گزینه۴ عامل x^2+x+1 همواره مثبت است، پس می‌توانیم طرفین نامعادله را در آن ضرب کنیم:

$$\frac{3x^2-5}{x^2+x+1}<x-1 \Rightarrow 3x^2-5<x^3-1 \Rightarrow x^3-3x^2+4>0$$

برای پیداکردن ریشه‌های معادله‌ی $x^3-3x^2+4=0$ اعداد ±1 و ±2 را در آن امتحان می‌کنیم. $x=2$ در معادله صدق می‌کند، پس آن را بر $x-2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x^2+4 & x-2\\ \cline{2-2} -(x^3-2x^2) & \\ \hline \quad -x^2+4 & \\ -(-x^2+2x) & \\ \hline \quad -2x+4 & \\ -(-2x+4) & \\ \hline \quad 0 & \end{array}$$

$$x^2-x-2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\ x=2\end{cases}$$

پس معادله دارای یک ریشه‌ی ساده‌ی $x=-1$ و یک ریشه‌ی مضاعف $x=2$ است:

x	$-\infty$		-1		2^*		$+\infty$
		−	|	+	|	+	

$\Rightarrow$ مجموعه‌جواب: $(-1,2)\cup(2,+\infty)$

یعنی $b=2$ و $a=-1$، پس: $b-a=3$

۷۴- گزینه۲ همه‌ی عوامل را می‌آوریم یک طرف و مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}\ge\frac{9}{2} \Rightarrow \frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}-\frac{9}{2}\ge0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2-2-2x^2-9x^2+9x}{2(x^2-x)}\ge0 \Rightarrow \frac{-9x^2+9x-2}{2(x^2-x)}\ge0$$

حالا عبارت به دست آمده را تعیین علامت می‌کنیم:

$$-9x^2+9x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{81-72}}{-18}=\frac{-9\pm3}{-18}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ x=\frac{1}{3}\end{cases} \quad \text{و} \quad x^2-x=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ x=1\end{cases}$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
		−	ϕ	+	|	−	|	+	ϕ	−	

پس مجموعه‌جواب نامعادله برابر $(0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1)$ است و مجموع طول این بازه‌ها برابر است با $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

۷۵- گزینه۴

دامنه‌ی نامعادله‌ی $(\frac{1}{3}x+4)(1+\sqrt{x})<x+x\sqrt{x}$ بازه‌ی $[0,+\infty)$ است. با توجه به مثبت‌بودن $1+\sqrt{x}$ می‌توانیم طرفین را بر $1+\sqrt{x}$ تقسیم کنیم:

$$(\frac{1}{3}x+4)(1+\sqrt{x})<x(1+\sqrt{x}) \Rightarrow \frac{1}{3}x+4<x$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x>4 \Rightarrow x>6$$

و اشتراک $x>0$ و $x>6$ می‌شود: $\{x:x>6\}$

۷۶- گزینه۲ دامنه‌ی رادیکال $x\ge0$ است. همه‌ی عوامل را می‌آوریم یک طرف و عبارت را تعیین علامت می‌کنیم:

$$\sqrt{x}\le\frac{2}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow \sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}-1}\le0 \Rightarrow \frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}\le0$$

$$x-\sqrt{x}-2=0,\quad \sqrt{x}=t \Rightarrow t^2-t-2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}t=2 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4\\ t=-1 \quad \text{غیرقابل‌قبول}\end{cases}$$

$$\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
			|	+	ϕ	−	|	+	

پس مجموعه‌جواب نامعادله برابر است با $(1,4]$ که شامل سه عدد صحیح است.

۷۷- گزینه۲ اول سعی می‌کنیم عبارت زیر رادیکال را به شکل اتحاد مربع کامل تبدیل کنیم تا رادیکال ساده شود:

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}=\sqrt{(x-2)+2\sqrt{x-2}+1}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{x-2}+1)^2}=\sqrt{x-2}+1$$

حالا نامعادله را حل می‌کنیم: $\sqrt{x-2}+1>x-1 \Rightarrow \sqrt{x-2}>x-2$

دامنه‌ی رادیکال $x\ge2$ است، پس با توجه به این‌که $\sqrt{x-2}$ مثبت است طرفین را بر $\sqrt{x-2}$ تقسیم می‌کنیم:

$$\sqrt{x-2}>x-2 \Rightarrow 1>\sqrt{x-2} \Rightarrow 1>x-2 \Rightarrow x<3$$

پس مجموعه‌جواب نامعادله $(2,3)$ است یعنی $b-a=1$.

۷۸- گزینه۱ اول عبارت زیر رادیکال را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt{x-2-2\sqrt{x-3}}<\sqrt{x}-2 \Rightarrow \sqrt{(x-3)-2\sqrt{x-3}+1}<\sqrt{x}-2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{x-3}-1)^2}<\sqrt{x}-2 \Rightarrow |\sqrt{x-3}-1|<\sqrt{x}-2$$

دامنه‌ی رادیکال‌ها $x\ge 0$ و $x\ge ۳$ است و عبارت $\sqrt{x}-۲$ هم باید مثبت باشد پس $\sqrt{x}-۲>۰ \Rightarrow x>۴$، یعنی دامنه‌ی معادله $(۴,+\infty)$ است.
طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x-۳-۲\sqrt{x-۳}+۱<x-۴\sqrt{x}+۴ \Rightarrow ۲\sqrt{x-۳}-۴\sqrt{x}>-۶$$
$$\Rightarrow \sqrt{x-۳}>۲\sqrt{x}-۳$$

عبارت $۲\sqrt{x}-۳$ که با توجه به دامنه‌ی $(۴,+\infty)$ مثبت است، پس باز هم طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x-۳>۴x-۱۲\sqrt{x}+۹ \Rightarrow ۱۲\sqrt{x}>۳x+۱۲ \Rightarrow ۴\sqrt{x}>x+۴$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} ۱۶x>x^۲+۸x+۱۶ \Rightarrow x^۲-۸x+۱۶<۰$$
$$\Rightarrow (x-۴)^۲<۰$$

نامساوی $(x-۴)^۲<۰$ هرگز نمی‌تواند برقرار باشد، پس مجموعه‌جواب نامعادله تهی است.

۷۹- گزینه۳ دامنه‌ی نامعادله $x\ge ۱$ است. طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x+۲+x-۱+۲\sqrt{(x+۲)(x-۱)}\le ۹$$
$$\Rightarrow ۲\sqrt{(x+۲)(x-۱)}\le ۸-۲x \Rightarrow \sqrt{x^۲+x-۲}\le ۴-x$$

با توجه به این‌که داریم $\sqrt{x^۲+x-۲}\le ۴-x$ پس باید $۴-x\ge ۰$ و در نتیجه $x\le ۴$، پس دامنه‌ی نامعادله می‌شود $۱\le x\le ۴$، باز هم طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x^۲+x-۲\le ۱۶-۸x+x^۲ \Rightarrow ۹x\le ۱۸ \Rightarrow x\le ۲$$

پس مجموعه‌جواب نامعادله می‌شود اشتراک $x\le ۲$ و دامنه‌ی نامعادله‌ی $۱\le x\le ۴$ یعنی بازه‌ی $[۱,۲]$.

۸۰- گزینه۳ دامنه‌ی رادیکال‌ها $x\ge ۳$ و $x\ge ۰$ است، پس دامنه‌ی نامعادله می‌شود $x\ge ۳$. اگر نامعادله را به شکل $\frac{\sqrt{x-۳}-۱}{\sqrt{x}+۲}\ge \sqrt{x}-۲$ بنویسیم با توجه به این‌که $\sqrt{x}+۲>۰$ است، می‌توانیم طرفین را در $\sqrt{x}+۲$ ضرب کنیم:

$$\sqrt{x-۳}-۱\ge x-۴ \Rightarrow \sqrt{x-۳}\ge x-۳$$

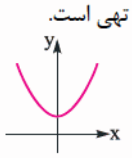
چون دامنه‌ی نامعادله $[۳,+\infty)$ است، پس $\sqrt{x-۳}$ هم مثبت است. طرفین را بر $\sqrt{x-۳}$ تقسیم می‌کنیم:

$$۱\ge \sqrt{x-۳} \Rightarrow x-۳\le ۱ \Rightarrow x\le ۴$$

پس مجموعه‌جواب نامعادله بازه‌ی $[۳,۴]$ است و در نتیجه $a+b=۷$.

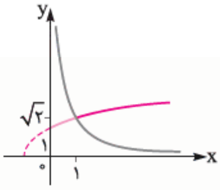
۸۱- گزینه۴ وقتی $x^۴+x+۱<۰$ پس $x^۴<-x-۱$ است، بنابراین باید $-x-۱>۰$ باشد یعنی $x<-۱$ و تنها گزینه‌ای که زیرمجموعه‌ی بازه‌ی $x<-۱$ است $\varnothing$ است.

تابع $y=x^۴+x+۱$ را در نظر می‌گیریم. مشتق تابع $y'=۴x^۳+۱$ است که ریشه‌اش $x=\frac{-۱}{\sqrt[۳]{۴}}$ است و عرض این نقطه (نقطه‌ی مینیمم) مقداری است مثبت، پس نمودار تابع به شکل زیر است و تابع هرگز مقادیر منفی اختیار نمی‌کند؛ یعنی مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $y<۰$ تهی است.

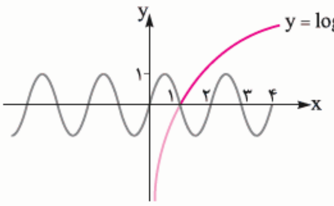


۸۲- گزینه۴ دامنه‌ی نامعادله‌ی $x\sqrt{x+۱}<\sqrt{۲}$ بازه‌ی $[-۱,+\infty)$ است. اگر $-۱\le x\le ۰$ باشد $x\sqrt{x+۱}\le ۰$ است، پس بازه‌ی $[-۱,۰]$ جزء مجموعه‌جواب نامعادله است. با شرط $x>۰$ نامعادله را می‌توانیم به شکل $\sqrt{x+۱}<\frac{\sqrt{۲}}{x}$ بنویسیم. برای تعیین جواب‌های نامعادله نمودار دو تابع $y=\frac{\sqrt{۲}}{x}$ و $y=\sqrt{x+۱}$ را با شرط $x>۰$ رسم می‌کنیم:

می‌بینیم که دو نمودار در نقطه‌ی $(۱,\sqrt{۲})$ متقاطع‌اند و با شرط $x>۰$ مجموعه‌جواب نامعادله بازه‌ی $(۰,۱)$ است، پس کل مجموعه‌جواب نامعادله‌ی $x\sqrt{x+۱}<\sqrt{۲}$ بازه‌ی $[-۱,۱)$ و در نتیجه $b-a$ برابر $۱-(-۱)=۲$ است.



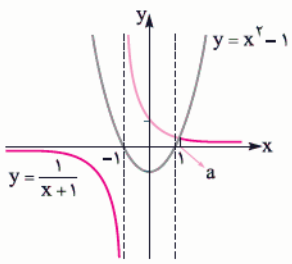
۸۳- گزینه۴ نامعادله را به شکل $\log_۲ x<\sin \pi x$ می‌نویسیم و نمودار دو تابع $y=\sin \pi x$ و $y=\log_۲ x$ را رسم می‌کنیم:



دقت کنید که نمودار هر دو تابع از نقطه‌ی $(۱,۰)$ می‌گذرد و نمودار تابع $y=\log_۲ x$ از نقطه‌ی $(۲,۱)$ می‌گذرد (یعنی نمودار دو تابع بعد از نقطه‌ی $x=۲$ همدیگر را قطع نمی‌کنند)، پس مجموعه‌جواب نامعادله بازه‌ی $(۰,۱)$ است.

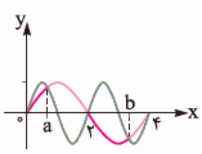
۸۴- گزینه۱ با مخرج‌مشترک گرفتن نامعادله به یک معادله‌ی درجه سوم می‌رسیم که نمی‌توانیم جواب‌هایش را پی دا کنیم. پس برای تعیین حدود جواب، نمودار دو تابع $y=x^۲-۱$ و $y=\frac{۱}{x+۱}$ را رسم می‌کنیم.

در شکل زیر اگر طول نقطه‌ی برخورد نمودار را برابر a فرض کنیم، مجموعه‌جواب نامعادله بازه‌ی $(-۱,a)$ است و با توجه به این‌که $a>۱$ است، با شرط $x\le ۱$ مجموعه‌جواب نامعادله می‌شود بازه‌ی $(-۱,۱]$ که طولش برابر ۲ است.



۸۵- گزینه۴ نمودار دو تابع $y=\sin\frac{\pi}{۲}x$ و $y=\sin \pi x$ را رسم می‌کنیم. دوره‌ی تناوب تابع $y=\sin\frac{\pi}{۲}x$ برابر ۴ و دوره‌ی تناوب تابع $y=\sin \pi x$ برابر ۲ است.

طبق شکل زیر مجموعه‌جواب نامعادله بازه‌های $(a,۲)$ و $(b,۴)$ هستند.



برای پیداکردن مجموع طول این بازه‌ها باید طول نقاط برخورد دو تابع را پیدا کنیم. ولی راه ساده‌تری هم داریم. با توجه به این‌که نمودار هر دو تابع نسبت به نقطه‌ی $(۲,۰)$ متقارن است، پس طول بازه‌ی $(b,۴)$ برابر طول بازه‌ی $(۰,a)$ است، پس مجموع طول دو بازه برابر مجموع طول‌های دو بازه‌ی $(۰,a)$ و $(a,۲)$ یعنی برابر ۲ است.